

**MONTE CARLO YÖNTEMİNİN
SAYISAL İNTEGRALLERE VE ELEKTROMANYETİK
DENKLEM İNTEGRALLERİNE UYGULANMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müh. Dilara TAVUKÇU

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 17 Ocak 2000

Tezin Savunulduğu Tarih : 2 Şubat 2000

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ercan TOPUZ

**Diğer Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Cevdet IŞIK
Doç. Dr. Cevat ERDAL**

Ocak 2000

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**MONTE CARLO YÖNTEMİNİN
SAYISAL İNTEGRALLERE VE ELEKTROMANYETİK
DENKLEM İNTEGRALLERİNE UYGULANMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müh. Dilara TAVUKÇU

Anabilim Dalı : ELEKTRONİK VE HABERLEŞME MÜHENDİSLİĞİ

Programı : ELEKTRONİK VE HABERLEŞME MÜHENDİSLİĞİ

Ocak 2000

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi hazırlama çalışmalarında beni yönlendiren ve yardımlarını esirgemeyen Prof. Dr. Ercan Topuz, Doç. Dr. Levent Sevgi ve Ar. Gör. Funda Akleman'a çok teşekkür ederim.

Ayrıca, bana her zaman destek olan ve daima yanımda bulunan aileme, Yük. Müh. Setrak Işıkbay'a ve bugüne gelmeme katkıda bulunan herkese en derin minnetlerimi sunarım.

Dilara Tavukçu

Haziran 1999

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR	v
TABLO LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	vii
SEMBOL LİSTESİ	ix
ÖZET	xi
SUMMARY	xiv
1. GİRİŞ	1
2. OLASILIKSAL KAVRAMLAR	17
2.1. Raslantısal Değişken ve Raslantısal Olay	17
2.2. Raslantısal Değişkenlerin Dağılımları	18
2.3. Sürekli Rasgele Değişkenler	19
2.4. Dağılım Parametreleri	21
2.4.1 Ortalama	22
2.4.2 Varyans	23
2.5. Merkezi Limit Teoremi	23
2.5.1 Merkezi limit teoreminin ispatı	26
3. MONTE CARLO YÖNTEMİ	32
3.1 Hata Değerlendirmesi	32
3.2 Sayısal İntegrasyon	35
3.2.1 Reddetme (rejection veya hit & miss) yöntemi	38
3.2.2 Ortalama (averaging) yöntemi	42
3.2.3 Kontrol değişkeni (control variates) yöntemi	44
3.2.4 Önem örnekleme (importance sampling) yöntemi	46
4. MONTE CARLO YÖNTEMİNİN UYGULAMALARI	51
4.1 Monte Carlo Yöntemine İlişkin Örnekler	51
4.1.1 Reddetme yönteminin uygulanışı ve sonuçları	53
4.1.2 Ortalama yönteminin uygulanışı ve sonuçları	56
4.1.3 Kontrol değişkeni yönteminin uygulanışı ve sonuçları	58
4.1.4 Önem örnekleme yönteminin uygulanışı ve sonuçları	62
4.1.4.1 Lineer yaklaşım fonksiyonu ile	63
4.1.4.2 Üstel yaklaşım fonksiyonu ile	65
4.1.4.3 $(1-x^3)$ yaklaşım fonksiyonu ile	67
4.1.4.4 Fonksiyon seçimlerinin karşılaştırılması	71

4.2 Simpson Yöntemi	72
4.3 Karşılaştırma	73
4.4 Önceden Üretilmiş Örnek Grubunun Değişik Büyüklüklerde Örnek Grubuna Bölünerek İncelenmesi	75
4.5 Monte Carlo Yönteminin Çok-Boyutlu Bir Probleme Uygulanması: Hiper Kürenin Hacmi	78
5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	84
KAYNAKLAR	86
EKLER	91
ÖZGEÇMİŞ	114

KISALTMALAR

CDF	: Cumulative Distribution Function, Olasılık Dağılım Fonksiyonu
FDTD	: Finite Difference Time Domain (Zamanda Sonlu Farklar)
GO	: Geometric Optic (Geometrik Optik)
PC	: Kişisel Bilgisayar (<i>Personel Computer</i>)
PDF	: Probability Density Function, Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu
rms	: Root Mean Square (Etkin Değer)
RSY	: Radar Saçılma Yüzeyi (RCS-Radar Cross Section)
SAR	: Synthetic Aperture Radar (Yapay Açıklıklı Radar)
SIR-C	: Space Imaging Radar-C
SMFSIA	: Sparse-Matrix Flat-Surface Iterative Approach
SSPE	: Split Step Parabolic Equation (Split Step Parabolik Denklemi)
UHF	: Ultra High Frequency (<i>300MHz-1GHz</i>)
VHF	: Very High Frequency (<i>30MHz-300MHz</i>)

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No:</u>
Tablo 2.1. Bir topluluğun parametre ve istatistikleri	24
Tablo 4.1. Reddetme yöntemi ile elde edilen sonuçlar	54
Tablo 4.2. Ortalama yöntemi ile elde edilen sonuçlar.....	57
Tablo 4.3. Kontrol fonksiyonu yöntemi ile elde edilen sonuçlar	61
Tablo 4.4. Önem örnekleme yöntemi ve $(1-x)$ yardımcı fonksiyonu ile elde edilen sonuçlar	65
Tablo 4.5. Önem örnekleme yöntemi ve e^{-x} yardımcı fonksiyonu ile elde edilen sonuçlar	67
Tablo 4.6. Önem örnekleme yöntemi ve $(1-x^3)$ yardımcı fonksiyonu ile elde edilen sonuçlar.....	70
Tablo 4.7. Simpson yöntemi ile elde edilen sonuçlar	72
Tablo 4.8. Hiper-kürenin boyut sayısına göre hacim değerleri.....	79
Tablo 4.9. 5000 örnek alınmak üzere Hiper-kürenin değişik boyutlar için hacim değerleri.....	80
Tablo 4.10. 5-boyutlu Hiper-kürenin değişik örnek değerleri için elde edilen hacim değerleri.....	81

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No:</u>
Şekil 1.1. 100 km. uzaklık için standart atmosfer kırılma indisi için Anlatık ve PE yönteminin sonuçları.....	5
Şekil 1.2. Standart atmosferde 1-boyutlu Gauss gürültüsü için 100 km.'deki gürültüsüz sonuç ve Monte Carlo yaklaşımı ile 1 kez ve 100 kez tekrarı sonucunda elde edilen sonuçlar	5
Şekil 1.3. Problemden kullanılan yüzey modeli	7
Şekil 1.4. Geminin RSY'nin bakış açısı ile değişimi.....	10
Şekil 1.5. a)Gemi hareketsizken hesaplanan RSY değişimi, b)%80 olasılık için hesaplanan RSY değişimi	11
Şekil 1.6. Ağaçların büyüme modelleri	13
Şekil 1.7. Ele alınan iki farklı ağaç modeli.....	14
Şekil 2.1. Topluluk ve topluluktan alınan örnekler	24
Şekil 2.2. Merkezi limit teoremi	25
Şekil 3.1. Monte Carlo İntegrasyonu.....	37
Şekil 3.2. Reddetme yöntemi.....	40
Şekil 3.3. Reddetme yöntemi için verimli olmayan keskin tepeli fonksiyonlar.....	42
Şekil 3.4. Ortalama Yöntemi	43
Şekil 3.5. Kontrol Değişkeni Yöntemi	45
Şekil 4.1. π değerinin bulunmasında kullanılacak çeyrek daire	52
Şekil 4.2. π değerinin reddetme yöntemi ile bulunması	53
Şekil 4.3. Reddetme yöntemi ile elde edilen sonuçlar.....	55
Şekil 4.4. Rasgele x noktalarına karşılık düşen fonksiyon değerleri.....	56
Şekil 4.5. Ortalama değeri yönteminde f_{ort} değeri ile integralin hesaplanması	57
Şekil 4.6. Ortalama yöntemi ile elde edilen sonuçlar	58
Şekil 4.7. İntegralini bulmak istediğimiz $\sqrt{1-x^2}$ ve yaklaşım için kullanacağımız $(1-x^3)$ fonksiyonları	59
Şekil 4.8. Kontrol değişkeni yöntemi ile elde edilen sonuçlar	60

Şekil 4.9.	$\sqrt{1-x^2}$ fonksiyonu ve $(1-x)$ yaklaşım fonksiyonu	63
Şekil 4.10.	Önem örnekleme yöntemi ve $(1-x)$ yardımcı fonksiyonu ile elde edilen sonuçlar	64
Şekil 4.11.	$\sqrt{1-x^2}$ fonksiyonu ve e^{-x} yaklaşım fonksiyonu	65
Şekil 4.12.	Önem örnekleme yöntemi ve e^{-x} yardımcı fonksiyonu ile elde edilen sonuçlar.....	66
Şekil 4.13.	İntegralini almak istediğimiz $\sqrt{1-x^2}$ fonksiyonu, $(1-x^3)$ yardımcı fonksiyonu ve bu yardımcı fonksiyondan elde edilen olasılık dağılım fonksiyonu	68
Şekil 4.14.	Olasılık dağılım fonksiyonu $F(x) = \frac{4}{3} \left(x - \frac{x^4}{4} \right)$ 'in ters fonksiyonun grafiği	69
Şekil 4.15.	Önem örnekleme yöntemi ve $(1-x^3)$ yardımcı fonksiyonu ile elde edilen sonuçlar	70
Şekil 4.16.	Önem örnekleme yönteminde çeşitli fonksiyonlar için sapma miktarları	71
Şekil 4.17.	Yöntemlerin Sapmalarının Karşılaştırılması	73
Şekil 4.18.	Toplam 5000 örneğin; 50, 100 ve 500'lü gruplar halinde işleme sokularak her grup için elde edilen π değerlerinin, gerçek π değeri etrafında saçılımı	75
Şekil 4.19.	Üretilen 10.000 örneğin, 100, 200, 500 ve 1000'li gruplar halinde incelenmesi sonucu elde edilen π değerlerinin sayısal dağılımı.....	76
Şekil 4.20.	Üretilen 100.000 örneğin 100, 200, 500 ve 1000'li gruplar halinde incelenmesi sonucu elde edilen π değerlerinin sayısal dağılımı.....	77
Şekil 4.21.	Üretilen 1.000.000 örneğin; 100, 200, 500 ve 1000'li gruplar halinde incelenmesi sonucu elde edilen π değerlerinin sayısal dağılımı.....	77
Şekil 4.22.	2-boyutlu hiper-küre.....	79
Şekil 4.23.	Değişik açılarda 3-boyutlu hiper-kürenin görünüşü.....	79
Şekil 4.24.	Çok-boyutlu hiper kürenin reddetme yöntemi ile elde edilen integral değerinden sapma miktarının, değişik boyutlar için boyut-sayısı sabit tutularak, alınan örnek sayısına göre değişiminin verdiği sonuçlar	82
Şekil 4.25.	Çok-boyutlu hiper kürenin reddetme yöntemi ile elde edilen integral değerinden sapma miktarının, değişik örnek sayıları için, boyut-sayısına göre değişiminin verdiği sonuçlar.....	83

SEMBOL LİSTESİ

B(M)	: Binom açılım denklemi,
d	: İntegralin boyut sayısı
E_g	: Verici tarafından hedef üzerine gönderilen radar işaretinin elektrik alan bileşeni
E_s	: Cisimden saçılan elektromanyetik dalganın elektrik alan bileşeni
F(x)	: Olasılık dağılım fonksiyonu
f(x)	: İntegrali aranılan fonksiyon
f_{üst}	: Fonsiyonun en yüksek değerinden de büyük olan herhangi bir değer
f(x_i)	: Rasgele seçilen x _i noktasına karşılık düşen fonksiyonun değeri
h(x)	: Kontrol değişkeni yönteminde kullanılan yardımcı fonksiyon
I	: Aranılan integral değeri
I_h	: Kontrol değişkeni yönteminde kullanılan yardımcı fonksiyonun integrali
M	: Binom denklemindeki başarılı deneme sayısı
N	: Işın Kırımı (n-1) 10 ⁶
n	: Yansıma indeksi (refractive index)
N	: Binom denklemindeki bağımsız deneme sayısı
N	: Her ortalamanın hesaplanmasında kullanılan örnek sayısı
n	: Alınan ortalama sayısı
N_{kabul}	: Reddetme yönteminde kabul edilen nokta sayısı
N_{toplam}	: Kullanılan toplam nokta sayısı
N_b	: 1-boyut için alınan örnek sayısı
P	: Atmosfer basıncı
P(X=x_i)=p_i	: X = x _i raslantısal olayının olasılığı
p(x)	: Olasılık yoğunluk fonksiyonu
p	: Denemenin başarı ile sonuçlanma olasılığı
q = (1-p)	: Denemenin başarısızlık ile sonuçlanma olasılığı
r	: Radarın cisme olan uzaklığı
R	: İntegrali alınacak olan f(x) fonksiyonunun tanımlı olduğu bölge
r	: Hiper kürenin yarıçapı
T	: Sıcaklık
Var(x) = σ(x)²	: x değişkeninin varyansı, ortalama değer etrafındaki yayılımı
W	: Su buharının kısmi basıncı
X	: Raslantısal değişken
x	: Raslantısal değişkenin bir gözlem sırasında aldığı değer
x_i	: Rasgele seçilen bağımsız örnek değerleri
X_k	: f(x) fonksiyonundan p(x) olasılık yoğunluk fonksiyonu yardımı ile alınan bağımsız örnekler
$\hat{x}$	: Seçilen noktaların ortalama -beklenen- değeri

$\bar{x}$	: Gerçek ortalama değer, beklenen değer
$\Delta \mathbf{x}$	: İntegralin adım büyüklüğü
ξ	: (0,1) aralığında üretilen düzgün dağılımlı rasgele sayılar
$\mu_{\hat{x}}$	: $\hat{x}$ ortalama değerlerinin ortalaması
σ	: m ² cinsinden Radar SaçılmaYüzeyi değerini
$\sigma(\mathbf{x})$	: x değişkeninin standart sapması
$\hat{\sigma}(x)$	: Seçilen noktaların varyansı
$\sigma(\hat{x})$	: $\hat{x}$ ortalama değerlerinin standart sapması
θ_g	: Işının geliş açısı
θ_s	: Işının saçılma açısı

MONTE CARLO YÖNTEMİNİN SAYISAL İNTEGRALLERE VE ELEKTROMANYETİK DENKLEM İNTEGRALLERİNE UYGULANMASI

ÖZET

Yasaları deterministik anlamda bilinen olaylarla ilgili karşılaştığımız problemlerin çoğunda, olaylardaki değişkenlerin değerleri bilindiğinde, probleme kesin ve tek bir çözüm bulunabilir. Buna karşılık, bütün anlamlı haberleşme işaretleri, alıcı uçtan izlendiği gibi tahmin edilemez veya raslantısaldır ya da sadece oldukça karmaşık denklemlerle ifade edilebilmekte ve çözümü için de çok uzun ve yoğun işlemler yapılmak zorunda kalınmaktadır. Mühendislikte de bu karmaşık denklemlerin çözülebilmesi için çalışmalar yapılmaktadır.

Bu tezin yapılmasındaki amaç, elektromanyetik problemlerde boyutu arttıkça çözülmesi güçleşen ve oldukça hızlı değişen karmaşık integrallere ve integral değerinin bulunması gereken ama tam olarak deterministik bir ifadesi bulunamadığından, sadece olasılıksal olarak ifade edilebilen fonksiyonların çözümünde Monte Carlo integral alma yönteminin uygulanabilir olup olmadığının araştırılmak istenmesidir.

Monte Carlo yöntemi, kimyadan termodinamiğe ve atom fiziğine kadar pek çok alanda başarı ile uygulanan ve oldukça iyi sonuçlar elde edilen bir yaklaşım ve tekniktir. Bu yöntem ile ilgili, çeşitli alanlarda pek çok literatür oluşmuştur.

Öncelikle, yöntemimizi uygulayabilmemiz ve daha iyi anlayabilmemiz için olasılıksal kavramlar üzerinde durulması gerekmektedir. Bu nedenle, Bölüm 2'de, ortalama, varyans ve Monte Carlo yönteminin temelini oluşturan merkezi limit teoreminden bahsedilmiş ve yöntemin temelini dayandığı mantık açıklanmıştır.

Bölüm 3'te ise, Monte Carlo integral alma yönteminin esaslarından bahsedilmiş ve büyük elemanlar topluluğunun özelliklerinin, rasgele elemanlar seçilerek oluşturulmuş bir alt kümesi aracılığı ile çıkarılabileceği açıklanmıştır. Monte Carlo'nun dört temel

yaklaşım modeli üzerinde durularak, modelleme hakkında bilgiler verilmiştir. Bahsedilen bu modeller; *reddetme (rejection - hit & miss)*, *ortalama (averaging)*, *kontrol değişkeni (control variates)* ve *önem örnekleme (importance sampling)* yöntemleridir.

Yöntemin uygulanışını anlatabilmek için, Monte Carlo integral alma yöntemleri, Bölüm 4'te, yöntem öncelikle sonucu bilinen belirli integrallere uygulanmış ve belirli bir integral alma yöntemi ile çözüme gidilerek, analitik yöntemle rasgele bir yöntem olan Monte Carlo yöntemi karşılaştırılmıştır. Böylelikle, yöntemin uygulanabilirliği ve verimliliği hakkında genel bir fikir elde edilerek, sonuca ne kadar yaklaşıldığı görülmüş ve analitik integral alma yöntemlerinin hata büyüklükleri ve yöntemimizde meydana gelen hata büyüklükleri irdelenmiştir. Çözüme gidilirken dikkat edilmesi gereken noktalar ve en iyi çözümün ne şekilde elde edileceği tartışılmış ve önceden üretilmiş örnek grubunun değişik büyüklüklerde örnek grubuna bölünerek incelenmesi ve bunun etkilerinden bahsedilmiştir.

Buradan elde edilen sonuçlardan, Monte Carlo integral alma yönteminin ancak integral boyutunun 4. dereceden büyük olan integaller için avantajlı sonuçlar verebileceği ve daha düşük boyutlu integraller için, sayısal tekniklere göre hassasiyetinin düşük olduğu anlaşılmıştır. Buradan da, Monte Carlo yönteminin, belirli bir şekilde formül ile ifade edilebilen ve boyut sayısı az olan integraller için verimli olmadığı sonucuna varılmıştır.

Maalesef ki, ilgilenilen elektromanyetik problemlerdeki integrallere bu yöntemin uygulanması pek avantajlı olamayacağı çok açıktır. Bu nedenle integral çözümleri yerine, Monte Carlo yönteminin ve yaklaşımının elektromanyetik problemlere ne şekilde uygulandığı araştırılarak, yöntemin olasılıksal ve doğadaki olayların incelenmesinde ne kadar verimli olduğundan Bölüm 5'te bahsedilmiştir. Monte Carlo yaklaşımı ile tekrar edilerek ortalaması alınan problemlerin sonuçlarının, gerçek değerlerle oldukça örtüşür bir şekilde çıktığı görülmüştür.

Bu yöntem özellikle, elektromanyetikte, ortam parametrelerinin rasgele değişiminin canlandırılması, saçılmanın meydana geleceği rasgele yüzeylerin üretilmesi, rasgele sınırların belirlenmesi ve bir sistemin genel performansının belirlenmesindeki hesaplamalarda yoğun olarak kullanılmaktadır.

Monte Carlo tekniği olasılıksal temelli bir yöntem olduğundan dolayı, çok fazla hesaba ve rasgele ortamları modelleyebilecek rasgele sayıya ihtiyaç duymaktadır. Bunun için de

güçlü bilgisayarlar ve ideal rasgele sayı üreticilerine ihtiyaç duymaktadır. Günümüzde, bilgisayarların hızlanması ile olasılıksal temelli rasgele işlemlerin çözümünde verimli bir yöntem haline gelmektedir.

Monte Carlo tekniği, basit raslantısal işlemlere ve çok boyutlu integrallere uygulanan, beklenen değerlerin tahmin edilmesinde etkili ve gerekli bir tekniktir. Bu teknik, çok-boyutlu integraller için, analitik formüllerden daha verimli bir tekniktir. Ayrıca, özel problemlere olasılıksal olarak rahatlıkla adapte edilebilir ve belirli integrasyon formüllerinin olmadığı, standart analitik tekniklerle çözülmesi verimsiz olacak, çok karmaşık problemlere rahatlıkla uygulanabilir.

IMPLEMENTATION OF MONTE CARLO TECHNIQUE TO NUMERICAL INTEGRATIONS AND ELECTROMAGNETIC INTEGRAL EQUATIONS

SUMMARY

An absolute and a unique solution may be found for the problems that we face, related to the events, whose rules are known by deterministic means, if and only if the values of the variables in the event are known. All meaningful communication signals, as observed in the receiver side, can not be guessed or can be stochastic or only be expressed by highly complex equations and very long and detailed processes must be done for the solution. In order to solve such complex equations, studies are being done in engineering.

The aim of this thesis is to examine whether the Monte Carlo integration method can be applicable or not in electromagnetic problems where the solution for a complex integral becomes difficult as it changes very fast and its dimension increases and where the solution for an integral is required that can only be expressed by a probabilistic function without any deterministic expression.

Monte Carlo method is an approximation and a technique which is applied, with great success, to various fields from chemistry to thermodynamics and atom physics and yields good results.

In order to apply our method and understand it better, we have to emphasize on some probabilistic terms. For this reason, mean, variance and the limit theorem which makes the fundamentals of Monte Carlo method, are introduced and the principles (logic) that the method is supported by are explained.

In the third section, the basics of the Monte Carlo integration method is introduced and how the characteristics for an unlimited element set can be observed by a subset of randomly chosen elements. The four main application models of Monte Carlo which are

rejection - hit & miss, averaging, control varieties and importance sampling method are introduced and explained.

In order to explain the application of the method, Monte Carlo integration methods are first applied to definite integrals whose results are known and then the calculation from the analytic method is compared with the random Monte Carlo method, in Section Four. So the knowledge of applicability and the efficiency of the method is gained, how close to the real results are observed and the errors between them are compared. The key points for the best result and how to get it, are discussed and the effects of dividing the predefined sample group into various smaller sample groups, are studied.

From the previous result it is understood that the Monte Carlo integration method is not applicable to the integrals with four or smaller order dimensions but higher orders and that they have a lower sensitivity compared with the numerical techniques. As a result, the method is not efficient for smaller order integrals, is expressed.

Unfortunately, it is obvious that the method has no advantage for the concerned electromagnetic problems. For this reason, instead of integral solutions, the adaptation of the Monte Carlo method and approximation to the electromagnetic problems are studied, and its efficiency in research of probabilistic and natural events are mentioned.

Especially in electromagnetics, this method is widely used for simulation of random variations, production of random rough surfaces where scattering occurs, determination of random boundaries and calculations to determine a general performance of a system

Since the Monte Carlo technique is based on a probabilistic method, it requires too many calculations and random numbers to model random mediums. For this reason it requires powerful computers and ideal random number generators. The speed improvement in computer science allows it to be an efficient way for the solutions of probabilistic based random process.

Finally, Monte Carlo is a necessary and an effective technique to guess the mean values of simple random process and high-order integrals. This technique is more efficient for higher-order integrals than analytic formulas. In addition, Monte Carlo technique can be easily adaptable to special problems because of its probabilistic behavior. Although,

analytic technique are not useful for the solutions of complex problems without a formulary expression, Monte Carlo technique can be used efficiently.

1. GİRİŞ

Yasaları deterministik anlamda bilinen olaylarla ilgili karşılaştığımız problemlerin çoğunda, olaylardaki değişkenlerin değerleri bilindiğinde, probleme kesin ve tek bir çözüm bulunabilir. Buna karşılık, bütün anlamlı haberleşme işaretleri, alıcı uçtan izlendiği gibi tahmin edilemez veya raslantısaldır. Ya da sadece oldukça karmaşık denklemlerle ifade edilebilmekte ve çözümü için de çok uzun ve yoğun işlemler yapılmak zorunda kalınmaktadır. Mühendislikte de bu karmaşık denklemlerin çözülebilmesi için çalışmalar yapılmaktadır.

Son 20 yılda bilgisayar hız ve belleklerindeki gelişmelere ve herkesin çalışma masasında kolayca erişebileceği PC(*personel computer - kişisel bilgisayar*)'lerin yaygınlaşmasına koşut olarak fiziksel problemlerin sayısal tekniklerle çözümü belirgin bir öncelik kazanmıştır. Günümüzde sayısal teknikler sadece karmaşık deterministik problemlere değil, istatistiksel hatta stokastik (*zamanla değişen istatistiksel özellik*) problemlere de uygulanır olmuştur. Bu uygulamalar, en basit bir integral almadan çok karmaşık sistem benzetimlerine kadar uzanabilmektedir.

Son yıllarda bir çok karmaşık problemin çözümünde Monte Carlo tekniğinin adı geçmektedir. İstatistiksel fizik, istatistiksel mekanik, termodinamik, nükleer fizik, uzay bilimleri ve elektromanyetik gibi çok değişik disiplinlerde *Monte Carlo anlamında benzetim* (simülasyon) tekniklerinden söz edilmektedir. Bu çalışmada Monte Carlo anlamında benzetim ele alınmış ve özellikle elektromanyetik problemlere uygulanması üzerinde durulmuştur.

Monte Carlo tekniği nedir? Hangi tip elektromanyetik problemler bu teknikle ele alınmaktadır? Tekniğin sağladığı üstünlükler nelerdir? Ele alınan problemler deterministik yöntemlerle çözülemediklerinden mi Monte Carlo tekniğine başvurulmaktadır? Yoksa deterministik tekniklerle de çözülebilir olmasına karşın Monte Carlo tekniği büyük üstünlük sağladığı için mi tercih edilmektedir? Bu ve

benzeri soruların yanıtlarının verilebilmesi herkesin dilinde olan ancak net ifade edilemeyen Monte Carlo benzetiminin açıkça anlaşılması için zorunludur.

Monte Carlo tekniği sayısal bir tekniktir. Yüksek hızda ve bellekte bilgisayarlar gerektirir. Ancak deterministik bir ifadenin sayısal çözümü ile karıştırılmamalıdır, çünkü Monte Carlo deterministik bir teknik DEĞİLDİR. Örneğin, $[\pm\pi]$ aralığında bir trigonometrik fonksiyonun yamuk kuralına göre sayısal integralin hesaplanması bir sayısal hesaplama değildir, ancak deterministik bir hesaplama değildir. Monte Carlo deterministik bir teknik olmamasına karşın deterministik ve stokastik problemlere uygulanabilir.

Monte Carlo yöntemi, olasılıksal temellere dayalı, matematiksel veya fiziksel problemleri çözmeyi hedefleyen bir yöntemdir. Problemlerin çözümünde olasılıksal bir benzerlik kurulmaya çalışılır. Deneysel örnekleme teknikleri kullanılır. Matematiksel bir model kurulmaya çalışıldığından yöntem, raslantısal süreçlerle tanımlanan fiziksel deneylere daha yakın bir yöntemdir. Monte Carlo yöntemi, karmaşık ve çok elemanlı sistemlerin ele alınmasında güçlü bir yöntemdir. Matematik formüllerden ziyade, karmaşık modellerin canlandırılması yoluyla modelleme yapan bir tekniktir.

"Monte Carlo" terimi, ismini Monaca'nun kumarhaneleri ile ünlü Monte Carlo şehrindeki rulet oyunlarından almaktadır. Rulet oyunu, değişik renkler ve sayılar bulunan bir diskten oluşur. Disk bir yönde hızla döndürülürken, küçük bir metal top aksi yönde disk üzerinde döndürülür. Bir süre sonra top bir renk ve sayıda durur. Matematiksel olarak rulet disk, mekanik bir rasgele sayı üreticiden başka bir şey değildir. Monte Carlo tekniği de temelde rasgele sayı üretimine dayandığından bu isim verilmiştir.

Ne tip problemler Monte Carlo tekniği ile ele alınabilir? İlgi alanımıza girdiğinden, Monte Carlo tekniği ile ele alınan problemler elektromanyetik ağırlıklı seçilmiştir.

Örneğin:

- Dalga propagasyonu problemleri:

Bu problemlerde çoğunlukla uzayın ve zamanın fonksiyonu olarak 4 ya da daha fazla boyutlu karmaşık integrallerle uğraşılır. İntegral içerisinde genelde genlik ve faz olarak hızlı değişimler içeren elektrik ya da manyetik alan değişkenleri söz konusudur. Çoğunlukla yaklaşıklıklar yapılarak bu integraller çözülebilir duruma getirilmeye çalışılır. Örneğin belli bir bölgede ya da belli bir frekans aralığında ya da belli ortamlardaki çözümlerle yetinmek zorunda kalarak, integraller analitik ya da sayısal olarak çözülebilir. Ancak genele ait çözümler, çoğunlukla çok-katlı integraller olarak karşımıza çıkar. Bu durumlarda, sayısal integrasyon teknikleri ile çözüme ulaşmak da hemen hemen olanaksızdır. Özellikle integrallerde boyut sayısı arttıkça sayısal örnekleme yoluyla integral almak olanaksızlaşır. Analitik çözümlerin bulunamadığı (*ölçülebilir, gözlemlenebilir büyüklükler cinsinden*) ve deterministik sayısal tekniklerin yetersiz kaldığı bu durumlarda Monte Carlo tekniğine başvurulur. Güzel olan, Monte Carlo tekniğinin integrasyon boyutuna bağlı olarak, etkinliğinin de artmasıdır.

Monte Carlo tekniğinin başarı ile uygulanabileceği dalga propagasyonu problemlerinin en önemlisi atmosferde dalga iletimidir. Atmosferin yere yakın tabakası (troposfer), yukarı tabakaları (iyonosfer) tamamen raslantısal elektromanyetik karakter gösterirler. Bu ortamlarda propogasyonun istatistiksel davranışından söz edilebilir. Haberleşme mühendisliğinde propogasyon kayıpları, girişim gibi etkilerin minimum ve maksimum değerleri elde edilmeye çalışılır.

Troposferik dalgalar; hava savunması, karasal ortamlar, yüzey araştırmaları, aerodinamic ve aerostatic kuvvetlere dayanan uygulamalarda ve farklı radar ve haberleşme sistemlerinde yaygın olarak kullanılmaktadır. [1,2]

Bu tip dalgaların yayılımları karmaşık olduklarından, bu problemlerin analitik modellenmesi oldukça zordur. Bu nedenle bu konu üzerinde yapılan çalışmalar genellikle yaklaşık çözümler üzerinedir. Yaklaşık olmalarına rağmen, bu çözümlerden elde edilen fiziksel anlayış, kompleks çevrelerde dalga yayılım olayının anlaşılmasına ve tamamiyle sayısal tekniklerle elde edilen sonuçların yorumlanmasına yardımcı olmuştur. Bu çalışmanın amacı

da, troposferik radyo dalga yayınının olasılıksal doğasını anlamaya yöneliktir.

Diğer yöntemlerin yanı sıra, *Split Step Parabolik denklem (SSPE)* ve *Geometrik Optik (GO)*, bir çok yayılım modelini de içermek üzere, dünya yüzeyindeki farklı kırınım profilleri için, dalga yayınılarının çizdirilmesinde kullanılan en yaygın yöntemlerdendir.

Troposferik radyo dalgalarının deterministik modellenmesi, temel olarak, yüzeyden ilk birkaç kilometredeki, yüksek kalitede, yüksek çözünürlükte ışıın kırınım (*refractivity*) profillerine dayanır. Bu hassas kırınım profilleri, genellikle yayılım ölçümlerinin istatistiksel analizi ile elde edilir. Bu modelleri kullanarak gerçekçi yayılım tahmini yapabilmek için, dünyanın aylık ve mevsimsel standart haritaları, alt ve üst kırılımları ve kanal (*duct*) istatistiklerinin uzun süreli yayılım ölçüm verileri kullanılmalıdır.

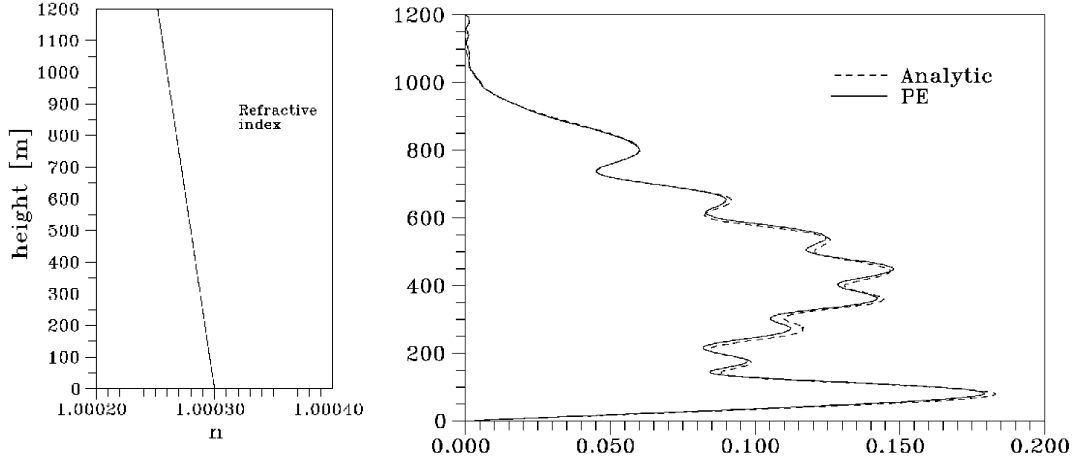
Işın kırınımı, basınç P , sıcaklık T ve su basıncı W ölçümlerine dayanan, genel bir formül ile hesaplanır. Bu formül şu şekildedir,

$$N = \frac{77,6P}{T} + \frac{3,73.10^{-3}W}{T^2} \quad (1.1)$$

Bütün bu parametreler için oldukça hassas ölçümler yapılmasına rağmen, doğruluk limitleri, propagasyon varsayımlarının eşik değerlerinin niceliksel ve niteliksel etkileri mertebesinde. Örneğin ΔT , ΔP ve ΔW ölçümlerindeki hassasiyet limitlerinin %1'den küçük olduğu bir durumda, kırınım indeks profilinde 10^{-6} 'lık bir değişme söz konusu olabilir. Bu değişme, propagasyon kalitesinde ciddi hatalara yol açabilir. Yükseklik kırınım profilleri, propagasyonun sinyal gücüne ve yönüne etki eder. Değişik profiller için değişik sonuçlar elde edilebilir ve kırınım her yerde aynı olmadığından dolayı değişik yayılım şekilleri de ortaya çıkabilir[1].

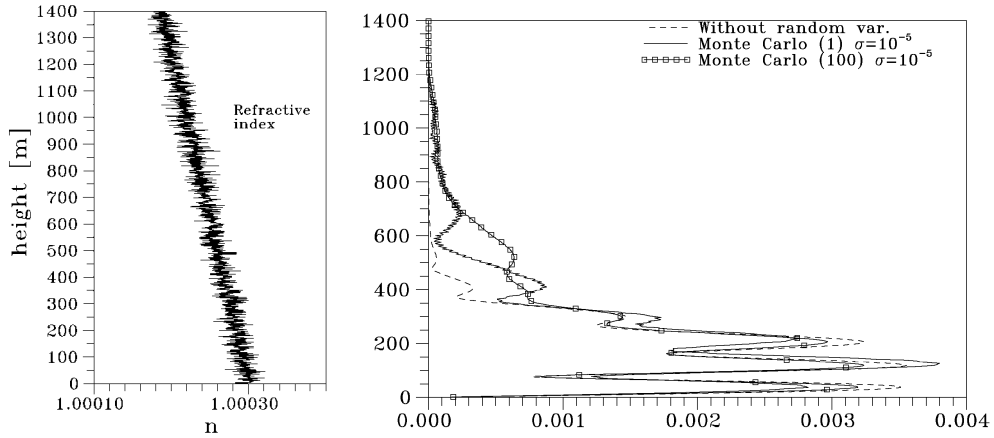
İncelenen bu çalışmada, radyo dalgalarının kestiriminde yeni bir teknik olan ısıdaki ve/veya basınçtaki sapmaların olasılıksal olarak tanımlandığı, genel *split step parabolik denklemi (SSPE)* algoritması kullanılmıştır. Öncelikle *SSPE* tekniği kullanılarak, dünya yüzeyindeki farklı kırınım profilleri için

yüksekliğin deterministik bir fonksiyonu olan dalga yayılımı çizdirilir. Bu işlem, bir çok verici anten paterni ve değişik yayılım özelliği olan bölgeler için tekrarlanmıştır.



Şekil 1.1 100 km. uzaklık için standart atmosfer kırılma indisi için Anlatik ve PE yönteminin sonuçları

Şekil 1.1’de yükseklikle kırılma indisinin azalması durumunda (standart atmosfer koşulu) belli bir uzaklıkta yükseklikle alan değişimine ait bir örnek gösterilmiştir. Burada kırılma indisi profilinin her yükseklikte sabit olduğu varsayılmaktadır. Oysa, gerçek problemlerde kırılma indisi profili de rasgele özellik gösterir. Bu duruma ait bir örnek Şekil 1.2’de gösterilmiştir.



Şekil 1.2 Standart atmosferde 1-boyutlu Gauss gürültüsü için 100 km.'deki gürültüsüz sonuç ve Monte Carlo yaklaşımı ile 1 kez ve 100 kez tekrarı sonucunda elde edilen sonuçlar

Şekil 1.2’den görüldüğü gibi yükseklikle kırılma indisinin değişimi standart atmosfer koşuluna uymakla beraber rasgele bir karakter göstermektedir. Belli

bir ortalama değerin etrafında kırılma indisi dalgalanmaktadır. Doğal olarak bunun dalga propagasyonuna yansıması beklenmelidir. Şekildeki alan profili de bunu göstermektedir[1].

- Radar sistemlerinde deniz ve karanın neden olduğu saçılma modelleri:

Radar problemleri elektromanyetik disiplinin karmaşık ve geniş uygulama alanı olan bir dalıdır. Nesnelerin elektromanyetik saçıcılığından yararlanarak, mesafe, hız, geometri gibi parametreler elde edilmeye çalışılır. Gönderilen bir elektromanyetik işaret nesnelere çarpar, radar alıcısı yönünde saçılan bileşen alınıp işlenerek bu parametreler elde edilir. Amaca göre değişik radar tipleri vardır. Ancak amacı ne olursa olsun, radar sistemlerinde ilgilenilen nesneler, hedef, bunu dışındaki bütün işaretler istenmeyen işaretlerdir. İstenmeyen işaretler gürültü (*noise*) ve kargaşa (*clutter*) olarak ikiye ayrılır. Özellikle kargaşa ve kargaşadan kurtulma önemli bir problemdir. Örneğin, karada konuşlandırılmış bir hava savunma radarında uçak, helikopter, füze gibi nesneler hedef, yağmur bulutları, dağlar, tepeler kargaşadır. Uçakta konuşlanan ve yere bakan bir savunma radarında ise, toplar, tanklar, uçaksavarlar hedef, bitki örtüsü, kara, deniz yüzeyleri kargaşadır.

Bu tip problemlerde, radar işareti ya da kargaşanın modellenmesi deterministik olarak hemen hemen olanaksızdır. Yeryüzü pürüzleri, deniz dalgaları gibi etmenlerin oluşturduğu kargaşa tamamen raslantısal karakterdedir. Üstelik bu etmenler radar işaretine fazı uyumlu (*coherent*) etki yaparlar. Kargaşayı gürültüden ayıran en önemli özellik de budur. Bu durumda Monte Carlo tekniği kullanılarak, yüzey pürüzleri, deniz dalgaları raslantısal olarak modellenebilir. Örneğin, F. D. Hastings ve arkadaşları [3] kaba yüzeylerden saçılma problemlerine, güçlü FDTD[Yee, 4] ve Monte Carlo tekniğini birlikte uygulamışlardır. FDTD tekniği ile Maxwell denklemleri iteratif çözülerek, saçılma doğrudan zaman domeninde modellenirken, yeryüzü pürüzleri Monte Carlo tekniği ile oluşturulmaktadır. Böylece, rasgele yüzeylerden saçılma problemleri modellenmiş olmaktadır.

Yüksek frekanslı dalgaların propagasyonunda ve saçınımında, genelde yeryüzü pürüzleri rasgele modellenmek zorundadır. Gerek kara üzerindeki

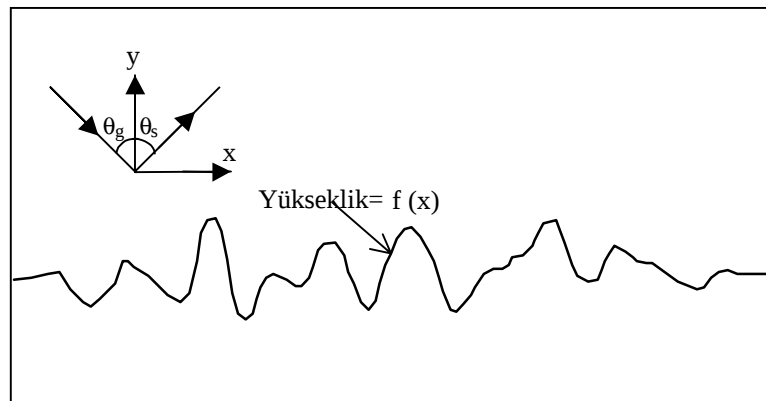
pürüzler (dağlar, binalar, bitki örtüsü vb.), gerekse deniz dalgalarının bu amaçla modellenmesi için Monte Carlo uygun bir yöntemdir.

Özellikle 1-boyutlu kaba yüzey modellemede Monte Carlo yöntemi 1970'lerden beri oldukça yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Rasgele saçılmayı modelleyebilmek için, 1-boyutlu yüzey uzunluğunun dalga boyuna kıyasla çok büyük olması gerekmektedir ve dalga denkleminin çözümü, 100'den fazla ortalama saçılma yüzeyinin hesaplanması sonucunda hesaplanarak, bir çok gerçekleştirme için çözümlenmelidir.

FDTD (*Finite Difference Time Domain – Zamanda Sonlu Farklar*) yöntemi ise, hemen her türlü elektromanyetik problemde yaygın olarak kullanılan güçlü bir sayısal tekniktir. FDTD, Maxwell denklemlerinin doğrudan zaman domeninde ayrıklaştırılarak iteratif çözümüne dayanır.[Yee, 4]

Şekil 1.3'de 2-boyutlu FDTD hesap uzayı ve Monte Carlo tekniği ile oluşturulan yeryüzü profili görülmektedir. Bu yapıda, dalga saçılması FDTD ile hesaplanmaktadır. Aynı işlem bir çok kez tekrarlandığında kaba yüzeylerden saçılma probleminin istatistiği hakkında oldukça gerçekçi veriler elde edilmektedir.

Bu tip problemlerde sonuçların güvenilirliği ancak deneysel yani ölçü sonuçları ile test edilebilmektedir. Monte Carlo tekniği ile çözülen problemler uzun deneysel verilerin istatistikleri ile karşılaştırılabilir.



Şekil 1.3 Problemde kullanılan yüzey modeli.

Şekil 1.3'deki örnek, kara kargaşasının Monte Carlo anlamında modellenmesine aittir. Durum deniz kargaşasında daha da karmaşıktır. Çünkü, bu kez rasgele oluşan yüzey pürüzleri yanında, rasgele hareket de söz konusudur.

- Radar saçılma yüzeyi modelleme:

Radar saçılma yüzeyi (*RSY*) (*Radar Cross Section, RCS*), problemi bir diğer önemli elektromanyetik saçılma problemidir.

RSY, bir hedefin radar işaretini radar alıcısı yönünde yansıtma yeteneğinin bir ölçüsü olarak tanımlanabilir. Matematiksel ifadesi;

$$\sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \frac{|E_s|^2}{|E_g|^2} \quad (1.2)$$

olarak verilir. Burada σ , m^2 cinsinden RSY değerini, E_g , verici tarafından hedef üzerine gönderilen radar işaretinin elektrik alan bileşenini, E_s , cisimden saçılan elektromanyetik dalganın elektrik alan bileşenini, r ise radarın cisme olan uzaklığını göstermektedir.

Hedeflerin RSY değerleri kullanılan frekansa ve hedef geometrisi ile hedefin elektriksel özelliklerine bağlıdır. Frekansa bağlı olarak hedefler farklı davranış gösterdikleri üç değişik RSY bölgesinde ele alınırlar. Bunlar;

1. Hedef boyutlarının dalga boyundan çok küçük kaldığı alçak frekanslar (*Rayleigh*) bölgesi,
2. Hedef boyutlarının dalga boyu mertebelerinde olduğu orta frekanslar (*Mie ya da rezonans*) bölgesi ve
3. Hedef boyutlarının dalga boyuna göre çok büyük olduğu yüksek frekanslar (*optik*) bölgesi olarak

isimlendirilir[5]. Rayleigh RSY bölgesinde, genelde hedefler noktasal hedef davranışı gösterdiğinden modellemek zor değildir. Rezonans bölgesinde hedef geometrisinin tamamı RSY davranışında etkilidir. Bu nedenle

geometrinin tamamı modellenmek zorundadır. Günümüzde Moment ya da Sonlu Elemanlar yöntemleri gibi güçlü frekans domeni teknikleri ile FDTD gibi güçlü zaman domeni teknikleri rezonans bölgesinde RSY modellemelerinde başarı ile uygulanabilmektedir. Ancak optik bölgede, hedefin bütün ayrıntıları farklı etkiler gösterebileceğinden, mevcut teknikler yetersiz kalmaktadır. Optik bölgede hedeflerin üzerindeki ayrıntılar önem kazandığından Monte Carlo tekniğine başvurulmaktadır.

RSY hesaplama problemini, aslında karmaşık bir cisimden geri saçılan elektromanyetik dalganın hesabı problemine indirgemek mümkündür. Ancak, çok basit geometrik şekiller için bile, geri saçılan alanı belirlemede kullanılabilecek kesin bağıntılar mevcut değildir. Cismin büyüklüğüne ve kullanılan elektromanyetik dalganın dalga boyuna göre bazı yaklaşıklıkların yapılması kaçınılmazdır.

Örneğin, bir gemi söz konusu olduğunda, kesin bir RSY değeri veya eğrisi vermek mümkün değildir. Radar gemiden gelen yansımaları yakalasa bile, geminin yaptığı rasgele hareketlerden dolayı, geminin konumunun küçük bir değişimiyle bile oldukça hızlı değişen RSY değeri oldukça fazla miktarda değişebilir. Bu nedenle yapılan hesaplamalarda bu rasgele hareketler de gözönüne alınmalıdır.

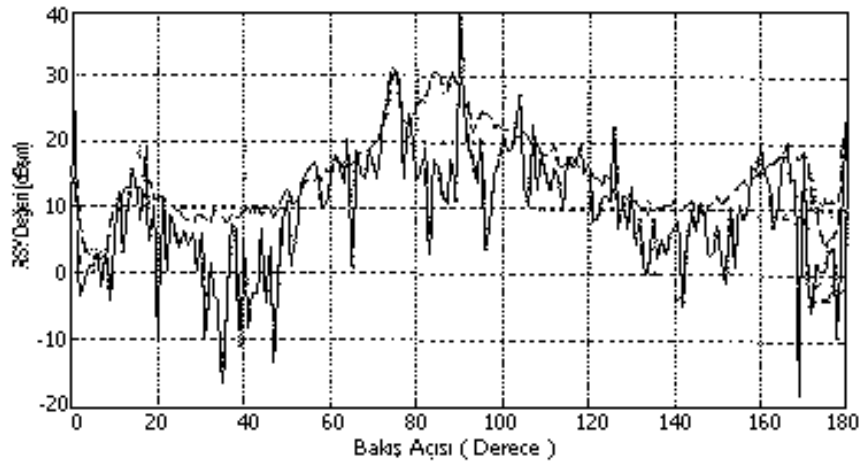
Gemi gibi konumu önceden kestirilemeyen hedefler için kullanılacak en uygun yöntemlerden biri, "tekrarlanan denemeler yöntemi" diye de adlandırılan Monte Carlo simulasyon yöntemidir. Bu yöntemde temel olarak yapılan RSY'si etkileyen faktörlerden birini bir rasgele sayı üretici kullanarak değiştirmek ve bunu bir çok kez tekrarlayarak belirli bir yaklaşıkla sonuca ulaşmaktır.

E. Topuz ve Ü. Yapanel [6,7], optik bölgede RSY problemine Monte Carlo tekniğini uygulamışlardır. Bu çalışmada, Monte Carlo yöntemi, rasgele hareketlerle oluşturulan modelin incelenmesinde kullanılmıştır. İncelenen çalışmada, bu rasgele hareketler şiddeti deniz durumuna ve gemi dinamiğine bağlı olan; yalpa (*roll*), sürüklenme (*yaw*) ve baş-kıç vurma (*pitch*) olmak üzere, 3-eksende modellenmiştir.

Oluşturulan modelde;

- Öncelikle geminin yapısına ve deniz şartlarına göre geminin yapabileceği yalpa, sürüklenme ve baş-kıç vurma hareketlerinin sınırları belirlenir.
- Radarın bakış anında geminin konumunu belirlemek için bir rasgele sayı üretici kullanılır. Geminin 3-boyutta yaptığı hareketlerin sinüsoidal bir yapıda olduğu varsayımı altında, bu rasgele sayılar kullanılarak geminin o an ki konumu belirlenir.
- Belirlenen bu konum için geminin RSY'si yaklaşık olarak hesaplanır.
- Bir bakış açısı için, işlemler tekrar edilir ve o bakış açısına ilişkin bir dosya oluşturulur.
- İstenilen tüm bakış açıları için aynı işlemler yapılarak, her bakış açısına ait bilgiler hesaplanır.
- Daha sonra bu veriler uygun bir biçimde işlenerek, istenilen olasılık değerlerine karşılık düşen RSY eğrileri belirlenir.

Aşağıdaki şekilde bir geminin RSY değerinin rasgele bakış açısına göre değişimi (mikrodalga radarı için) görölmektedir[6].

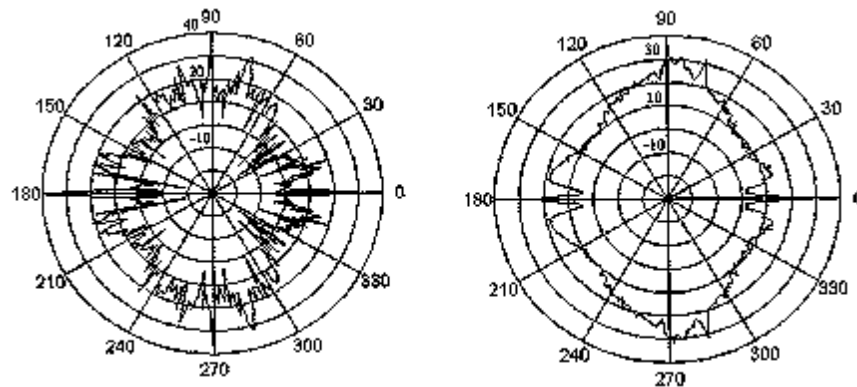


şekil 1.4 Geminin RSY'nin bakış açısı ile değişimi

Burada düz çizgi ile gösterilen geminin herhangi bir hareket yokken elde edilen *RSY* değeridir. Kesik çizgi ile gösterilen değerler ise, radarın o bakış açısı için, gemiden alınabilecek farklı *RSY* değerlerinin %80'ninin mutlak olarak altında kalacağı bir eşik değeridir. Bu durumda, radarın herhangi bir bakış açısı için, gemi *RSY*'inin aldığı değer, kesikli çizginin aldığı değerden %80 olasılıkla daha düşük olması beklenir.

RSY değerinin geminin durumuna göre çok hızla değişmesi, radarın gemiye bakış açısının ölçme anında kesin olarak belirlenememesi, geminin hareketlerinin deniz durumuna ve geminin yapısına bağlı olmasından dolayı *RSY* değeri, belli bir gemi ve deniz durumu için belirlenebilecek sınırlar arasında değişen raslantısal bir büyüklüktür. *RSY* değerinin değişimlerini istatistiksel olarak belirlemek mümkündür. Bu durumda da, bu etkiler dikkate alındığında, tek ve kesin bir bakış açısından veya *RSY* değerinden bahsedilemez. Bu şartlar altında bakış açısı, gemi hareketlerine bağlı olarak belirlenebilen sınırlar arasında değerler alan raslantısal değerler alan raslantısal bir değişken olarak tanımlanabilir. Bu durumda *RSY*'nin değeri, belirli bir olasılıkla, daha küçük (veya büyük) kalması gereken değerler olarak hesaplanabilir.

Şekil 1.5'te söz konusu geminin *RSY* davranışı açısal diagramlarda gösterilmiştir. Solda gemi hareketsizken, sağda ise gemi hareketli iken Monte Carlo anlamında benzetim sonuçları verilmiştir.



Şekil 1.5 a) Gemi hareketsizken hesaplanan *RSY* değişimi,
b) %80 olasılık için hesaplanan *RSY* değişimi

Bu çalışmada Monte Carlo yöntemi, geminin RSY hesaplamalarının yapılması için, çeşitli bakış açıları ve gemi konumları için tekrar edilerek uygulanmıştır. Bu uygulamada, hesaplamalarda kullanılacak bakış açısının verilen bir bakış açısı etrafında değişimi, bir rasgele sayı üretici yardımıyla belirlenir ve arka arkaya yapılan bir çok değer için RSY hesaplanır. Verilen bakış açısı için, alınan bu örneklerden faydalanarak RSY değişimi bulunur. İşlem bakış açısının belirlenecek diğer değerleri için tekrarlanır. Sonuçta elde edilecek kesin bir RSY değeri değil, belirli bir olasılıkla ölçülecek RSY'nin küçük (ya da büyük) olacağı değerdir. Böylelikle hesaplamalarda elde edilen sonuçlar gerçek değerlere, Monte Carlo yönteminin hata sınırları dahilinde yakınsayacaktır.

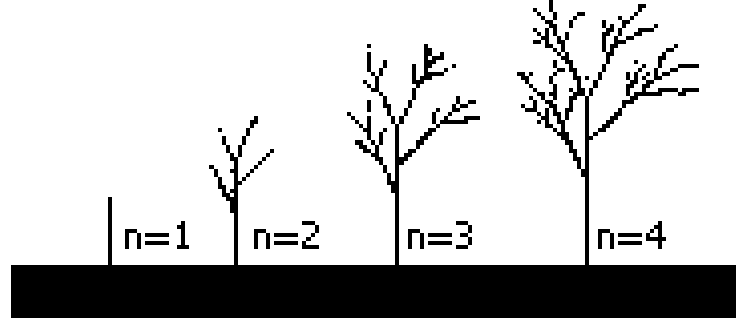
Bu durumda, her bir bakış açısı için alınacak örnek sayısının çoğaltılması, sonucun doğru olma olasılığını arttıracığı için, yeterli sayıda örnek alınarak her bir bakış açısı için işlem tekrarlanarak, elde edilen sonuçların istatistiksel yapısı da incelenmelidir.

- Karmaşık ortamlarda saçılma problemleri:

Özellikle hava platformlarında bulunan radarlar için yeryüzünde duran ya da hareketli nesnelerin algılanmasında bitki örtüsü ve zemin pürüzleri önemlidir. Genelde rasgele değişim karakterine sahip bu problem Monte Carlo yöntemi ile modellenmektedir.

Özellikle, *VHF (Very High Frequency, 30MHz - 300MHz)* ve *UHF (Ultra High Frequency, 300MHz-1GHz)* radarlarında güncel problem bitki örtüsü ardına gizlenen hedeflerin saptanabilmesidir. Örneğin, uçaktaki bir VHF radarı bir ağaç dibine mevzilenmiş bir kaç askeri ya da bir koruluğa saklanmış bir tankı saptamada güçlük çekmektedir. Ya da bir uçaktaki radar ile bitki örtüsü profili çıkarmada yeryüzü doku farklılıkları (orman, bozkır, çalılık vb.) ve etkileri iyi bilinmelidir. Bu konuda bir çok grup çalışmalarını sürdürmektedir. Yukarıda belirtilen radar tiplerinde ağaç cinsleri, dal profilleri ve hatta yaprak biçimleri bile saçılma karakterini değiştirmektedir. İlk baharda ağaçların yapraklı olması ile sonbaharda yaprak dökümünden sonraki durumda RSY davranışları çok farklı olabilmektedir.

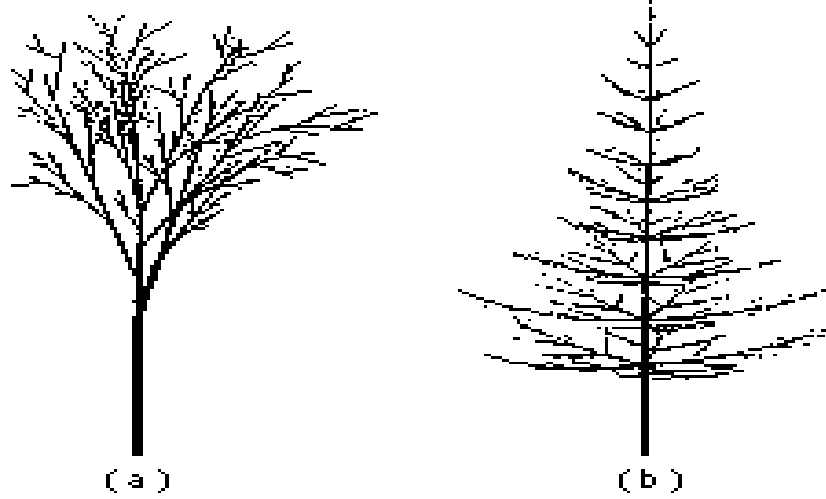
Örneğin Y. Lin ve K. Sarabandi [8] çalışmalarından birinde değişik ağaç ve ormanların neden olduğu bitki örtüsünden saçılmayı Monte Carlo yöntemi ile modellenmişlerdir. Söz konusu çalışmada bitki örtüsünün nasıl oluşturulduğuna dair bir örnek Şekil 1.6’de gösterilmiştir.



Şekil 1.6 Ağaçların büyüme modelleri

Şekilde ağaç tipleri ve büyüme modelleri adım adım gösterilmiştir. Yapılan çalışmada, çeşitli ağaç tip ve büyüme modelleri için yansıma modelleri elde edilmiştir. Ele alınan modellerin tamamı gerçek ağaç modellerinden ve daha önceden elde edilmiş bilgilere dayanılarak çıkartılmıştır.

Şekil 1.6’teki adım adım modelleme kullanılarak farklı ağaçlar ve bu ağaçlardan oluşmuş orman profilleri çıkarılmaktadır. Şekil 1.7’te iki farklı ağaç modeli gösterilmektedir.



Şekil 1.7 Ele alınan iki farklı ağaç modeli

Modelde üretilen ağaç toplulukları, gövde ve dallar, silindir; yapraklar, diskler halinde modellenerek üretilmişler ve bu ağaç topluluğu modeli bir yüzey üzerine yerleştirilerek, ağaçlarla kaplı bir yer yüzeyi modellenmiştir. Modellenen bu karmaşık yapıların saçıcılığı değişik saçılma durumları modellenerek elde edilmektedir. Örneğin bir ağaç dalının saçılması, doğrudan saçılan bileşen, doğrudan saçılan ve yerden yansıyan bileşen, yerden yansdıktan sonra daldan saçılan bileşen, vb. bileşenlerin toplamı şeklinde modellenmektedir.

Bu çalışmada, Monte Carlo tekniğinin katkısı çok sayıda ağaç ve orman modeli ile saçılma hesaplarının tekrarlanması yönündedir. Bu problemde dalların ve yaprakların rüzgar etkisi ile hareketli olması nedeniyle RSY davranışının ancak istatistiği ile ilgilenilebilir. Monte Carlo tekniğinin katkısı, problemde bu istatistiği elde etmekte olacaktır.

Yapılan çalışmaların doğruluğunu kontrol etmek amacıyla, çok-frekans ve polarizasyonlu yapay açıklıklı radarlarıyla (*Synthetic Aperture Radar*) birçok geliş açısı için akça ağaç topluluklarından elde edilen sonuçlar karşılaştırılmış ve oldukça yakın sonuçlar elde edilmiştir[8].

Yukarıda sıralanan örnekler elektromanyetik problemlerde Monte Carlo tekniğinin uygulanması hakkında yeterli bilgi vermektedir. Benzetim anlamında Monte Carlo tekniğinin uygulanmasına önemli bir örnek de sensör tümleştirme ve gözetleme

sistemleri benzetimidir. Örneğin, denizlerimizdeki su üstü ve hava hareketliliğinin değişik sensörler kullanılarak gözetlenmesi ancak ve ancak Monte Carlo anlamında benzetim teknikleri ile modellenebilir. Belli bir anda gözetlenen bölgede onlarca geminin ya da uçağın değişik rotalarda seyretmesi, radarların bu hedefleri yakalaması ve izlemesi Monte Carlo anlamında modellenebilir. Burada yapılması gereken bu gemi uçaklarla çok sayıda senaryonun oluşturularak, sensör fiziğine uygun olarak denenmesi ve sonuçların istatistiksel değerlendirilmesidir. Böyle bir problemin gerçek çözümünün elde edilebilmesi ve problemin deneysel olarak test edilebilmesi olanaksızdır.

Bu bölümde değinilmesi gereken son nokta, Monte Carlo tekniğinin ele alınmasına yöneliktir. Konuyu en iyi vereceği düşünüldüğünden Monte Carlo tekniği integral alma problemi üzerinde işlenmiştir.

Bu çalışmada, elektromanyetik problemlerde boyutu arttıkça çözülmesi güçleşen ve oldukça hızlı değişen karmaşık integrallere ve integral değerinin bulunması gereken ama tam olarak deterministik bir ifadesi bulunamadığından, sadece olasılıksal olarak ifade edilebilen fonksiyonlara Monte Carlo integral alma yönteminin uygulanması anlatılacaktır.

Bölüm 2'de öncelikle, yöntemimizi uygulayabilmemiz ve daha iyi anlayabilmemiz için olasılıksal kavramlardan bilmemiz gereken, ortalama, varyans ve Monte Carlo yönteminin temelini oluşturan merkezi limit teoreminden bahsedilecektir.

Bölüm 3'te ise, Monte Carlo integral alma yönteminin esaslarından bahsedilerek, büyük elemanlar topluluğunun özelliklerinin, rasgele elemanlar seçilerek oluşturulmuş bir alt kümesi aracılığı ile çıkarıldığı ve herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun (a,b) aralığındaki beklenen değerinin, bu fonksiyonun bu aralıktaki rasgele seçilen sonlu sayıdaki noktaların beklenen değerinden çıkarılabileceği ve Monte Carlo'nun dört temel yaklaşım modeli anlatılacaktır. Bahsedilecek bu modeller; *reddetme (rejection - hit & miss)*, *ortalama (averaging)*, *kontrol değişkeni (control variates)* ve *önem örnekleme (importance sampling)* yöntemleridir. Bunlara ek olarak Monte Carlo yönteminin boyutla olan ilişkisini daha iyi anlamak amacı ile bir hiper küre ele alınacak ve bir Monte Carlo yöntemi ile farklı boyutlar ve değişik örnek sayıları için bu kürenin integral değerleri hesaplanacaktır.

Yöntemin uygulanışını anlamak için, Bölüm 4'te, yöntem öncelikle sonucu bilinen belirli integrallere uygulanacaktır. Buna ek olarak, belirli bir integral alma yöntemi ile çözüme gidilerek, analitik yöntemle rasgele bir yöntem olan Monte Carlo yöntemi karşılaştırılacaktır. Böylelikle yöntemin uygulanabilirliği ve verimliliği hakkında genel bir fikir elde edilerek, sonuca ne kadar yaklaşıldığı görülecektir. Çözüme gidilirken dikkat edilmesi gereken noktalar ve en iyi çözümün ne şekilde elde edileceği tartışılacaktır. Ayrıca, önceden üretilmiş örnek grubunun değişik büyüklüklerde örnek grubuna bölünerek incelenmesi ve bunun etkilerinden bahsedilecektir.

Sonuçların yer aldığı Bölüm 5'te ise, Monte Carlo yönteminin avantajları, dezavantajları ile birlikte çalışmanın amacı açıklanacaktır. Elde edilen sonuçlar yorumlanarak, bize olan ve olabilecek katkılarından söz edilecektir.

2. OLASILIKSAL KAVRAMLAR

Doğa bilimlerinde karşılaştığımız problemlerin bir çoğunda olaydaki değişkenlerin değerleri bilindiğinde probleme kesin ve tek bir çözüm bulunabilir. Örneğin bir direncin uçlarındaki gerilim ve üzerinden akan akım bilindiğinde direncin değerini, veya bir kapasitenin sığası ve uçlarındaki gerilim biliniyorsa, kapasitenin tuttuğu yükü hesaplayabiliriz. Bu gibi olaylarda yasalar *deterministik* anlamda bilinmektedir. Buna karşılık öyle olaylar vardır ki, bunlarda sonucu önceden bilmek mümkün değildir. Basit bir örnek olarak, bir zar atışında zarın hangi yüzünün geleceğini önceden kestiremeyiz.

2.1 Raslantısal Değişken ve Raslantısal Olay

Raslantısal değişken, gelecekteki bir gözlemde alacağı değeri önceden kesinlikle bilinmeyen bir değişkendir. Bir zarın atışında gelecek sayı önceden bilinmeyeceğinden bir raslantısal değişkendir. Bir gürültü örneğinde, gürültünün herhangi bir anda gözlenecek değerini önceden bilmek mümkün olmadığına göre, gürültü de raslantısal bir değişkendir.

Raslantısal değişkenlerdeki belirsizlik, bu değişkenlerin alacağı değerlerin önceden tahmin edilemeyen çok sayıda etkene bağlı olmasında ileri gelir. Bu doğal olaylardaki değişmelerden kaynaklanabileceği gibi, olay hakkındaki bilgilerimizin yetersizliğinden de ileri gelebilir. Böyle değişkenleri *deterministik* bir *yaklaşım*la incelemek mümkün değildir. Yani değişkenin alacağı değeri önceden kesinlikle belirleyebilen yasalar elde edilemez. Bunun yerine *probabilistik (olasılıkçı)* bir yaklaşım gerekir.

Bir raslantı değişkeninin gelecekteki bir gözlem sırasında alacağı değer kesin olarak bilinmeyeceğine göre, ancak değişkenin bir gözlem sırasında belli bir değer almasına bir *raslantısal olay* denilir. Buna göre hangi raslantısal olayın görüleceği önceden kesinlikle bilinmemekle birlikte, herhangi bir raslantısal olayın görülme

olasılığını belirlemek mümkündür. Örnek olarak zar atışında seçilen bir sayının (1 ile 6 arasında bir sayı) görülmesi bir raslantısal olay olup bu raslantısal olaylardan herhangi birinin görülme olasılığı belirlenebilir.

Olasılık teorisinde bir raslantısal olayın meydana gelmesi şansı *olasılık (ihtimal, probabillite)* adı verilen bir büyüklükle ifade edilmektedir. Olasılık teorisinin temel aksiomuna göre her raslantısal olayın, değeri 0 ile 1 arasında değişen bir olasılığı vardır. Raslantısal değişkeni büyük harfle (X), raslantısal değişkenin bir gözlem sırasında aldığı değeri bu harfe karşı gelen küçük harfle (x) gösterirsek, $X=x_i$ raslantısal olayının olasılığı şu şekildedir.

$$P(X = x_i) = p_i \quad (2.1)$$

p_i 'nin 0 ile 1 arasında değişebilen olasılık değerinin, 0 olması söz konusu olayın hiçbir zaman meydana gelmeyeceğini, 1 olması ise kesinlikle (her gözlemde) meydana geleceğini gösterir. Olasılık 0'dan 1'e doğru arttıkça gözlemler sırasında o olayın görülme şansı da artar, yani olayla daha sık karşılaşılır[9].

Ancak mühendislikte karşılaştığımız problemler genelde olasılıkların basit bir şekilde hesaplamasına olanak vermeyecek kadar karmaşıktır.

2.2 Raslantısal Değişkenlerin Dağılımları

Bir raslantısal değişkene ve bu değişkenin içinde bulunduğu topluluğa ait çeşitli rasgele olayların olasılıklarını toplu bir şekilde bir dağılım fonksiyonu ile ifade edebiliriz.

Bir çok raslantı değişkeni belli bir aralıkta kalsa bile, sürekli olarak değiştiğinden *basit olayların* yani örnek uzayındaki eleman sayıları sonsuzdur. Ancak pratikte raslantısal değişkenin değişme bölgesi genellikle alt ve üst sonlu olduğu gibi, ölçümleri de belirli bir duyarlılıkla yapılabildiği için değişkeni sonlu sayıda değerden birini alabilen bir değişken gibi düşünmek daha anlamlı olur.

Böyle bir değişkene ait çeşitli basit olayların olasılıkları,

$$p(x_i) = P(X = x_i) \quad (2.2)$$

şeklinde x_i değerlerinin hizasında birer düşey çizgi ile gösterilirse, bu değişkenin *olasılık yoğunluk fonksiyonu (probability density function-pdf)* elde edilmiş olur. Bu fonksiyon, çeşitli basit olayların olasılıklarını bir bakışta görmemize imkan verir. Düşey çizgilerin olasılıkları toplamı daima 1'e eşittir.

$$\sum_{(x_i)} p(x_i) = 1 \quad (2.3)$$

Başka bir gösteriliş şekli de, rasgele değişkenin belli bir değere eşit ya da daha küçük olasılığını çizmektedir;

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) \quad (2.4)$$

Pratikte önem taşıyan bu fonksiyona *olasılık dağılım fonksiyonu (cumulative distribution function-cdf)* adı verilir. Fonksiyonun tanımından hemen görülebileceği gibi;

$$F(x_i) = \sum_{(x_j \leq x_i)} p(x_j) \quad (2.5)$$

$F(x)$ fonksiyonu 0'dan 1'e doğru gidildikçe artan basamaklı bir fonksiyondur.

Olasılık yoğunluk fonksiyonu ile olasılık dağılım fonksiyonunun aynı bilgileri içerdiği ve ikisinden birisi bilindiğinde diğerinin kolayca elde edilebileceği görülmektedir.

2.3 Sürekli Rasgele Değişkenler

Sürekli bir raslantısal değişkenin alabileceği değerlerin (örnek uzayındaki basit olayların) sayısı sonsuzdur. Başka bir deyişle, böyle bir değişken bütün gerçek sayı değerlerini (ya da belli bir aralıktaki bütün değerleri) alabilir. Mühendislikte karşılaşılan raslantısal değerlerin çoğu sürekli niteliktedir. Örneğin bir işaretin gücü, bir elemanın üzerinden akan akım (ancak ölçüm araçlarının sınırlı bir prezisyonu

olması dolayısı ile bu değişkenlerin alabildikleri değerler sonlu sayıda gibi düşünölmekte, bu nedenle kesikli raslantısal değışkenler olarak ele alınmaktadır).

Sürekli bir raslantısal değışkenin alabileceğı değerlerin sayısı sonsuz, bu değerleri alan olasılıklarının toplamı ise 1'e eşit olacağından $X=x$ şeklindeki basit olayların olasılıkları sıfıra gidecektir. Bu neden sürekli raslantısal değışkenlerde basit olayların olasılıklarından söz etmek yerine değışkenin x ile $x+dx$ arasındaki bir aralıkta kalması şeklinde bir birleşik olayın olasılığını tanımlamak yoluna gidilir. Bunun için olasılık yoğunluk fonksiyonu $p(x)$ şöyle tanımlanır;

$$p(x)dx = P(x < X \leq x + dx) \quad (2.6)$$

Yani $p(x)$ eğrisi ile x-ekseni ve $x, x+dx$ noktalarından çizilen düşey çizgiler arasında kalan değışkenin $(x, x+dx)$ aralığında bir değeri alması olasılığını göstermektedir.

Değışkenin sonlu bir aralıkta bulunması olasılığı bu aralığı küçük parçalara ayırıp, bu parçalarda bulunma olasılıklarını toplayarak hesaplanabilir, sonuç olarak şu ifadeye varılır;

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx \quad (2.7)$$

Değışkenin $(-\infty, +\infty)$ aralığında bir değeri alması kesin (olasılığı 1 olan) bir olay olduğuna göre $p(x)$ daima şu koşula uyar;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1 \quad (2.8)$$

Sürekli değışken halinde olasılık dağılım fonksiyonunun tanımı değışmez;

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (2.9)$$

$F(x)$ ile $p(x)$ arasında şu ilişkinin bulunduğı yukarıdaki denklemlerden hemen görölebilir;

$$F(x) = p(-\infty < x < +\infty) \quad (2.10)$$

$$= \int_{-\infty}^x p(u) du$$

$$p(x) = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x p(u) du \quad (2.11)$$

$$= \frac{dF(x)}{dx}$$

Olasılık dağılım fonksiyonu daima şu koşulları sağlar;

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

$$F(-\infty) = 0$$

$$F(+\infty) = 1$$

$$\varepsilon > 0$$

$$F(x + \varepsilon) \geq F(x)$$

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < X \leq x_2)$$

Yukarıda tanımlanan olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonları bir raslantısal değişkenin olasılık uzayına ait bütün bilgileri kapsar.

2.4 Dağılım Parametreleri

Bir rasgele değişkenin herhangi bir gözlem sırasında alacağı değer önceden bilinemez, fakat; bu değişkenin içinde bulunduğu toplulukla ilgili dağılım fonksiyonu bu değişkenin ve içinde bulunduğu topluluğun davranışı ile ilgili bilgileri kapsar.

Bazı durumlarda dağılım fonksiyonun vereceği bilgilerin tümünün bilinmesi gerekmeyebilir ya da bu bilgileri elde etmek mümkün olmayabilir. Bu durumda,

topluluğun raslantısal değişkenin ve davranışının başlıca özelliklerini birkaç parametre yardımıyla özetlemek mühendislik problemlerinde yeterli olabilir.

Değişkenin dağılım fonksiyonunun belli özelliklerini yansıtan bu sayılara *dağılım parametreleri* denir. Parametrelerin eldeki verilerden tahmin edilmesi ve kullanılması dağılım fonksiyonun tahmin edilip kullanılmasına göre çok kolay olur. Bu nedenle yaklaşık da olsa çabuk cevapların elde edilmesi gereken mühendislik problemlerinde bu parametreleri kullanmak gerekir. En çok kullanılan parametreler *istatistik moment* tipinde olan *ortalama* ve *varyans*'tır. Bu değerler, bir işlem yapılmak istenip, topluluktan rasgele elemanlar seçilerek, yeni oluşturulan ve üzerinde işlem yapılması daha kolay olan alt grup ile topluluğun tümü hakkında bilgi sahibi olunulmaya çalışıldığında grup parametreleri olarak da oldukça önemlidir.

2.4.1 Ortalama

Bir raslantı değişkeninin dağılımının en önemli değeri dağılımın merkez değeridir. Çeşitli gözlemler sırasında değişkenin alacağı değerler çevresinde kümелendiği merkez değer için farklı tanımlar kullanılabilir. Ancak bunların içinde en çok kullanılan *ortalama* ya da *beklenen değer* olarak adlandırılan ve aşağıdaki şekilde tanımlanan değerdir.

Bu değişkenin ortalaması, $p(x)$ *olasılık yoğunluk fonksiyonu* ile x 'in çarpımının $(-\infty, +\infty)$ aralığında integre edilerek bulunur.

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \quad (2.12)$$

Raslantısal değişkenlerle ilgili problemlerde değişkenin ortalama değeri en anlamlı parametredir. Zira değişkenin dağılımının merkezini, yani çeşitli gözlemlerde gözlenecek değerlerin çevresinde dağılacağı değeri gösterir. Bir çok problemde, raslantı değişkeni deterministik bir gözle ele alınmak istenirse, bu değişkenin daima ortalamaya değerine eşit olduğu kabul edilir.

2.4.2 Varyans

Ortalama değeri bir raslantı değişkeninin merkezi değerini göstermekle birlikte, bu değeri çevresindeki yayılımının büyüklüğü hakkında bir bilgi vermez. Bu yayılmayı ölçmek için çok kullanılan parametre *varyans*'tir.

$$Var(x) = \sigma(x)^2 = \overline{(x - \bar{x})^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 p(x) dx \quad (2.13)$$

Yukarıdaki ifadeye göre varyans, raslantısal değişkenlerin ortalamasından farkının karesinin beklenen değeridir. Varyansın büyük olması değişkenin ortalama çevresindeki yayılımının büyük olduğunu gösterir.

Varyansın boyutu raslantısal değişkenin boyutunun karesi gibidir. Bu çoğu zaman fiziksel açıdan anlamlı olmadığından varyans yerine varyansın karekökü olan *standart sapmayı* kullanmak yoluna gidilir.

$$\sigma(x) = Var(x)^{\frac{1}{2}} = \left(\overline{x^2} - \bar{x}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.14)$$

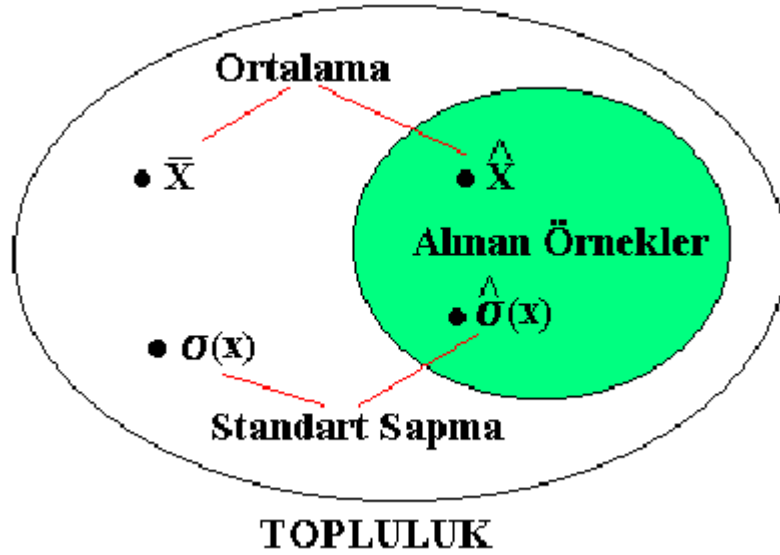
Standart sapma raslantısal değişkenle aynı boyutta olduğu için daha anlamlıdır.

Bir çok hallerde ortalama ve standart sapmayı bilmek raslantısal değişkenin dağılımı hakkında hüküm vermek için yeterli olur. Standart sapmanın göz önüne alınması ile değişkenin raslantısal karakteri de ana hatlarıyla gözönüne alınmış olur.

2.5 Merkezi Limit Teoremi

Olasılıksal çalışmaların en önemli amacı, ilgilenilen topluluğun istatistiksel özelliklerini çıkartmaktır. Böylelikle topluluğun elemanları ve dağılımları hakkında bilgi sahibi olunur. Merkezi limit teoremi, olasılık alanındaki en önemli teoremlerden biridir. Bu teorem sayesinde çok geniş bir olasılıksal olayı, normal dağılımı kullanarak, hem pratik hem de teorik anlamda yorumlayabilmemizi sağlar. Böylelikle standart normal dağılım tablosunu kullanarak, örneklerin ortalamalarını da kullanarak çözüme ulaşılabilir.

Genellikle topluluğun elemanlarının tümü, işlemin çok pahalı ve uzun olmasından bu istatistiksel incelemede yer alamazlar. Bu nedenle, topluluk içinden seçilen belirli sayıdaki örnek grubu ile topluluğun tamamının özellikleri belirlenilmeye çalışılır. Topluluktan alınan bu örnek grubunun istatistiksel özellikleri, grubun tamamının istatistiksel özellikleri ile benzerdir[10].



Şekil 2.1 Topluluk ve topluluktan alınan örnekler

Topluluğun tümüne ilişkin olan ortalama ve varyans değerlerine; *parametre*, topluluktan seçilen örnek grubundan elde edilen ortalama ve varyans değerlerine de *istatistik* denilir. Genel olarak literatürlerde, parametreler *Greek harfleri*, istatistikler de *Latin harfleri* ile gösterilir.

Bu elde ettiğimiz değerleri şöyle gösterelim;

Tablo 2.1 Bir topluluğun parametre ve istatistikleri

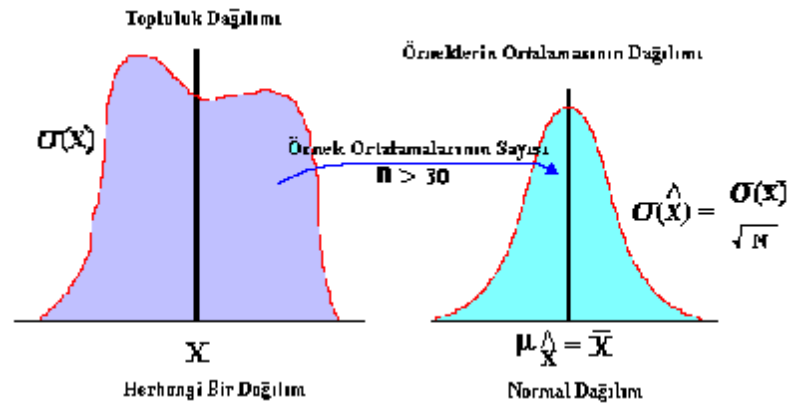
	Parametre	İstatistik
Ortalama	$\bar{x}$	$\hat{x}$
Standart Sapma	$\sigma(x)$	$\hat{\sigma}(x)$

Bu tablodaki $\hat{x}$ değeri,

$$\hat{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (2.15)$$

denklemleri ile hesaplanır.

Bir topluluğun parametrelerini belirlemek için, topluluk içinden örnekler alıp, ortalama ve varyansını hesaplarız. Bu işlemde elde edilen değerler, topluluğun parametreleri olan $\bar{x}$ ve $\sigma(x)$ gerçek ortalama ve varyans değerlerinden sapma gösterirler bu da bir nevi hataya sebep olur. Çünkü elde edilen istatistikler, seçilen örneklerin ortalama ve varyansıdır ve topluluğun tamamı ele alınmadığından dolayı, gerçek değerlerden farklılık gösterir.



Şekil 2.2 Merkezi limit teoremi

Topluluğun parametreleri ve topluluktan alınan örneklerin istatistikleri arasındaki ilişki, topluluktan alınan örnek sayısı ile ilgilidir ve merkezi limit teoremine göre bu ilişki şu şekildedir;

- Örneklerin ortalaması, normal dağılım şeklinde dağılır.
- Bu örneklerin ortalamalarının dağılımının ortalamasına, $\mu_{\hat{x}}$ dersek, bu değer topluluğun gerçek ortalama değeri olan $\bar{x}$ parametresine eşit olacaktır ve ortalamaların standart sapmasının dağılımını, $\sigma(\hat{x})$ olarak gösterirsek, topluluğun standart sapması ile arasındaki ilişki,

$$\sigma(\hat{x}) = \frac{\sigma(x)}{\sqrt{N}} \quad (2.16)$$

denklemine eşittir. Bu formülden de görülebileceği gibi, tam doğru sonuca ancak $N \rightarrow \infty$ durumunda ulaşılabilir. Bu da bizim sonsuz örnek alarak, kümenin tamamını incelememiz durumunda söz konusudur[10,11].

Burada şaşırtıcı olan, merkezi limit teoreminde, meydana gelen hata yani oluşan sapma gerçek topluluğumuzun dağılımına bağlı değildir ve topluluktan aldığımız örneklerin ortalamasının dağılımı daima *normal dağılım* şeklindedir. Ayrıca bir çok dağılım için, normal dağılım N arttıkça oldukça hızlı bir yakınsama gösterir. Burada N değeri, her ortalama değeri için ele alınan örnek sayısıdır, toplam örnek sayısı değildir.

Bir değişkenin normal dağılım özelliklerini gösterebilmesi için, eleman sayısının $n>30$ şartını sağlaması gereklidir. Eğer eleman değerleri çok ayrık ve birbirinden oldukça farklılık gösteriyorsa, $n>30$ eleman sayısı değeri bize normal dağılımı garantileyemeyebilir[10,11]. Böyle bir durumda 50 ve daha fazla örnek alınması gereklidir. Çok karmaşık dağılımlı fonksiyonların incelenmesi oldukça risklidir ve hesaplamalarda dikkatli olunması gereklidir ama böyle bir dağılıma da çok sık raslanmaz. Yine de sonuçlara daha iyi yaklaşım yapabilmek ve güvenilirliği kontrol etmek için, 50'den fazla ortalama örneği almak yerinde bir karar olacaktır.

Bu tezde yapılan denemelerde, ortalama hesapları, 10, 20, 50, 100, 500, 1 000, 5 000, 10 000, 100 000, 1 000 000 ve 10 000 000'lik örnek grupları olarak integral değerleri yani ortalama değerleri hesaplanmıştır. Bu örnek gruplarının-ortalama değerlerinin- da $n>30$ şartını sağlaması için, her örnek grubu denemesi, 100 kez tekrar edilmiştir.

2.5.1 Merkezi limit teoreminin ispatı

Merkezi limit teoremine ulaşmak için, olasılık teorisinin temeli olan binom denklemini ele alalım;

$$B(M) = \frac{N!}{M!(N-M)!} p^M q^{N-M} \quad (2.17)$$

Bu denklemde N bağımsız deneme sonucunda elde edilen M başarı olasılığı ifade edilmektedir. Eşitlikteki p değeri, deneme sonucundaki başarı olasılığını, $q = 1 - p$ olmak üzere de q değeri denemenin başarısızlıkla sonuçlanması olasılığını

göstermektedir. N ve $N-M$ değerlerinin yeterince büyük olduğu durumlar için, *Stirling* denklemini kullanarak,

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \quad (2.18)$$

yazarak, (2.17) denklemini normal dağılım şekline getirebiliriz;

$$B(M) \equiv f(\hat{x}) = \frac{1}{\sigma(\hat{x})\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\hat{x} - \bar{x})^2}{2\sigma^2(\hat{x})}\right] \quad (2.19)$$

Burada, $\bar{x} = Np$ ve $\sigma(\hat{x}) = \sqrt{Npq}$ değerine eşittir. $N \rightarrow \infty$ 'a gittiği durumda, merkezi limit teoremine göre, N tekrar sonucunda Monte Carlo yöntemi ile elde edilen $\hat{x}$ 'in dağılımı, (2.19) denkleminde elde edilen $f(\hat{x})$ normal dağılım davranışını gösterecektir. Başka bir deyişle, çok sayıda rasgele sayıyı toplamı normal dağılım karakteristiğini gösterir[12].

(2.16) denklemini (2.19) denkleminde yerine koyduğumuzda,

$$f(\hat{x}) = \sqrt{\frac{N}{2\pi}} \frac{1}{\sigma(x)} \exp\left[-\frac{N(\hat{x} - \bar{x})^2}{2\sigma^2(x)}\right] \quad (2.20)$$

eşitliğini elde etmiş oluruz. Böylelikle denkleminiz, Gauss dağılımı haline gelmiş olur.

Normal (Gauss) dağılımı, bir çok farklı mühendislik, fizik ve istatistik problemlerinin çözümünde yaygın olarak kullanılır. *Gauss modelinin* en dikkat çekici yönü, *merkezi limit teoremine* dayanmasıdır. Bu nedenle, Gauss modeli genellikle eldeki verilerin, belli bir kurala uymadan, oldukça değişken dalgalanmalar gösterdiği durumlarda kullanılır.

N örnek sayısı sonlu olduğu müddetçe, Monte Carlo hesaplamalarında tam bir sonuç elde etmek mümkün değildir. Bu yüzden $\bar{x}$ civarında, $\hat{x}$ 'in belirli bir olasılıkla içinde bulunacağı, bir limit değer veya bir aralık tahmin edilmeye çalışılır.

Merkezi limit teoremini Ters Fourier Dönüşümü ile de ispatlayabiliriz;

$(x_1, x_2, \dots, x_N)$ N tane rasgele bağımsız değişken takımı olmak üzere; her x_i değişkeninin ortalaması μ_i ve varyansı σ_i olan keyfi bir $P(x_1, \dots, x_N)$ olasılık dağılım fonksiyonunun olduğunu varsayalım. Bu durumda bu rasgele değişken grubunun normalize raslantı değişkeni,

$$X_{norm} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \sigma_i^2}} \quad (2.21)$$

'in ortalama değeri $\mu=0$ ve varyansı da $\sigma^2=1$ olacaktır. Eğer değişkeni normalize forma dönüştürmek mümkün değilse,

$$X = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (2.22)$$

değişkeni normal dağılır ve ortalaması $\mu_X=\mu_x$ ve varyansı da $\sigma_X = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$ 'dir[13-20].

Bunu ispatlamak için, $P_X(f)$ 'in *Ters Fourier Dönüşümü*nden yola çıkalım,

$$\begin{aligned} F^{-1}[P_X(f)] &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i f X} p(X) dX \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi i f X)^n}{n!} p(X) dX \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi i f)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} X^n p(X) dX \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi i f)^n}{n!} \langle X^n \rangle \end{aligned} \quad (2.23)$$

Bu $\langle X^n \rangle$ parametresini de,

$$\langle X^n \rangle = \langle N^{-n} (x_1 + x_2 + \dots + x_N)^n \rangle \quad (2.24)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} N^{-n} (x_1 + x_2 + \dots + x_N)^n p(x_1) p(x_2) \dots p(x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N$$

şeklinde yazarsak,

$$F^{-1}[P_X(f)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi i f)^n}{n!} \langle X^n \rangle \quad (2.25)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi i f)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} N^{-n} (x_1 + x_2 + \dots + x_N)^n p(x_1) p(x_2) \dots p(x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2\pi i f (x_1 + x_2 + \dots + x_N)}{N} \right]^n \frac{1}{n!} p(x_1) p(x_2) \dots p(x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i f (x_1 + x_2 + \dots + x_N)}{N}} p(x_1) p(x_2) \dots p(x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i f x_N}{N}} p(x_N) dx_N \right]$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i f x}{N}} p(x) dx \right]^N$$

$$= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{2\pi i f}{N} \right) x + \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi i f}{N} \right)^2 x^2 + \dots \right] p(x) dx \right\}^N$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx + \left(\frac{2\pi i f}{N} \right) \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx - \frac{(2\pi f)^2}{2N^2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx + O(N^{-3}) \right]^N$$

$$= \left[1 + \frac{2\pi i f}{N} \langle x \rangle - \frac{(2\pi f)^2}{2N^2} \langle x^2 \rangle + O(N^{-3}) \right]^N$$

$$= \exp \left\{ N \ln \left[1 + \frac{2\pi i f}{N} \langle x \rangle - \frac{(2\pi f)^2}{2N^2} \langle x^2 \rangle + O(N^{-3}) \right] \right\}$$

Bu denklemi,

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots \quad (2.26)$$

ile genişletirsek,

$$\mu_x = \langle x \rangle \quad (2.27)$$

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (2.28)$$

olduğundan denklem aşağıdaki hali alacaktır.

$$\begin{aligned} F^{-1}[P_x(f)] &\approx \exp \left\{ N \left[\frac{2\pi i f}{N} \langle x \rangle - \frac{(2\pi f)^2}{2N^2} \langle x^2 \rangle + \frac{1}{2} \frac{(2\pi i f)^2}{N^2} \langle x \rangle^2 + O(N^{-3}) \right] \right\} \\ &= \exp \left[2\pi i f \langle x \rangle - \frac{(2\pi f)^2 (\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2)}{2N} + O(N^{-3}) \right] \\ &\approx \exp \left[2\pi i f \mu_x - \frac{(2\pi f)^2 \sigma_x^2}{2N} \right] \end{aligned} \quad (2.29)$$

Bu denklemin de *Fourier Dönüşümünü* alırsak,

$$\begin{aligned} p(X) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i f X} F^{-1}[P_x(f)] df \\ &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i f (\mu_x - X) - \frac{(2\pi f)^2 \sigma_x^2}{2N}} df \end{aligned} \quad (2.30)$$

denklemini elde ederiz. $a = 2\pi(\mu_x - x)$ ve $b = \frac{(2\pi\sigma_x)^2}{2N}$ olmak üzere,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iaf - bf^2} df \quad (2.31)$$

denklemine, Abramowitz ve Stegun [14] (1972, s.302, denklem 7.4.6)'daki dönüşümü uygulayıp,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iaf-bf^2} df = e^{-\frac{a^2}{4b}} \sqrt{\frac{\pi}{b}} \quad (2.32)$$

şeklinde yazabileceğimizden,

$$\begin{aligned} p(X) &= \sqrt{\frac{\pi}{(2\pi\sigma_x)^2}} \exp\left\{-\frac{[2\pi(\mu_x - x)]^2}{4(2\pi\sigma_x)^2}\right\} \\ &= \sqrt{\frac{2\pi N}{4\pi^2\sigma_x^2}} \exp\left\{-\frac{4\pi^2(\mu_x - x)^2 N}{16\pi^2\sigma_x^2}\right\} \\ &= \frac{\sqrt{N}}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\mu_x - x)^2 N}{2\sigma_x^2}\right\} \end{aligned} \quad (2.33)$$

denklemini elde ederiz. Fakat burada $\sigma_x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$ ve $\mu_x = \mu_x$ olduğundan,

$$p(X) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\mu_x - x)^2}{2\sigma_x^2}\right\} \quad (2.34)$$

Merkezi limit teoreminin de temelini oluşturan bu denklemdende anlaşılacağı gibi, çok fazla ve ilintisiz rasgele etkilerin toplamı yaklaşık olarak *Normal Dağılım* gösterir.

3. MONTE CARLO YÖNTEMİ

Monte Carlo yöntemi, karmaşık ve çok elemanlı sistemlerin özelliklerinin hesaplanmasında güçlü bir yöntem olmakla birlikte, deterministik olmayan işlemlerde de kullanılır. Matematik formüllerden ziyade, karmaşık modellerin canlandırılması yoluyla modelleme yapan bir tekniktir. "Monte Carlo" terimi, Monte Carlo şehrinde rasgele sayılarla oynanan rulet ve diğer oyunlara benzer olarak, rasgele sayılar kullanılarak, yaklaşımın gerçekleştirilmesinden kaynaklanmaktadır.

Monte Carlo yöntemi, deterministik sayısal bir yöntem değildir. Aksine, olasılıksal temellere dayalı olarak, matematiksel veya fiziki problemleri çözmeyi hedefleyen bir yöntemdir. Problemin çözümü için olasılıksal bir benzerlik kurmaya çalışarak, deneysel örnekleme aracılığı ile, matematiksel bir model kurma amacı güdüldüğünden, yöntem, raslantısal süreçlerle tanımlanan fiziksel deneylere daha yakın bir yöntemdir.

Yöntemde, rasgele sayılar üretilerek doğal rasgele süreçler canlandırılmaya çalışılır.

Bu yöntemin temel amacı, büyük elemanlar topluluğunun özelliklerinin, rasgele olarak seçilmiş bir alt kümesi aracılığı ile çıkartılmasıdır. Örneğin, herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun (a, b) aralığındaki beklenen değeri, bu fonksiyonun bu aralıkta, rasgele seçilen sonlu sayıdaki noktalarının beklenen değerinden çıkarılabilir.

3.1 Hata Değerlendirmesi

Monte Carlo yöntemi, hesaplamada kullanılan programın pek çok kez çalıştırılması ve bir çok denemenin sonucunda ulaşılan ortalama çözümler verir. Bu nedenle çözümler, beklenen değer hakkında yapılan tahminlerin dalgalanmalarını ve de yükselip alçalmalarını da içerir. Olasılıksal bir yaklaşım yapıldığından, tam olarak kesin bir sonuç elde edilmesi imkansızdır.

Monte Carlo yönteminin uygulanmasında oluşan bu olasılıksal belirsizliği değerlendirmek için, rasgele değişkenlerle ilişkili çeşitli olasılıksal tekniklere başvurulmaktadır.

Monte Carlo yönteminde, hata olarak incelenen, Bölüm 2'de de bahsedildiği gibi *elde edilen beklenen değer ve bu değerın varyansı*'dır. Bu değerler, *Merkezi Limit Teoremi* ile incelenir.

X rasgele değişkenimiz ve $p(x)$ x -rasgele değişkenimizin olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere, bu değişkenimizin beklenen değeri $\bar{x}$ olmak üzere,

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \quad (3.1)$$

olduğundan, Monte Carlo yönteminde kullandığımız gibi, x_i rasgele ve bağımsız örnekler olmak üzere, $\bar{x}$ 'in seçtiğimiz bu x_i bağımsız noktalarına göre beklenen değeri,

$$\hat{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (3.2)$$

olacaktır. $\hat{x}$ kestirimi, tam olarak $\bar{x}$ gerçek beklenen değerine eşit olmadığından dolayı, bu iki değer arasındaki sapmalar bize hata saçılımımızı verecektir. Bu hata saçılımını bulmak için, öncelikle $\bar{x}$ 'in kendi gerçek beklenen değerinden saçılımının karesinin beklenen değerini yani varyansını hesaplayalım.

$$Var(x) = \sigma^2 = \overline{(x - \bar{x})^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 p(x)dx \quad (3.3)$$

$(x - \bar{x})^2 = x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2$ olduğundan, bu denklemi,

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx - 2\bar{x} \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx + \bar{x}^2 \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx \quad (3.4)$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan da,

$$\sigma^2(x) = (\overline{x^2} - \bar{x}^2) \quad (3.5)$$

denklemini elde edelim. Varyans $\sigma^2(x)$ 'in karekökü, x 'in beklenen değeri $\bar{x}$ etrafında ne kadar bir saçılım gösterdiğinin bir ifadesidir ve *standart sapma* bu durumda,

$$\sigma(x) = \left(\overline{x^2} - \bar{x}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.6)$$

şeklinde gösterilir.

Bu standart sapma değeri, aynı zamanda meydana gelen hatanın büyüklüğü hakkında bilgi verir. Beklenen değeri $\bar{x}$ olan, x değerimiz ile; Monte Carlo yönteminde kullandığımız beklenen değeri $\hat{x}$ olan, bağımsız ve de rasgele seçilen x_i örneklerinin standart sapması arasında,

$$\sigma(\hat{x}) = \frac{\sigma(x)}{\sqrt{N}} \quad (3.7)$$

şeklinde bir ilişki vardır. Bu denklemden görülebileceği gibi, Monte Carlo yönteminde, $\bar{x}$ değerine ulaşabilmek için kullandığımız, x_i örneklerinin sayısı N ne kadar yüksekse, $\hat{x}$ değerimizde aradığımız $\bar{x}$ değerine o kadar yakındır. Monte Carlo yönteminde, hata boyuttan bağımsızdır ve (3.7) denklemden görülebileceği gibi,

$\frac{1}{\sqrt{N}}$ ile orantılı olarak azalır. Mesela, hatamızı $\frac{1}{10}$ azaltabilmek için, örnek sayımız

$\bar{N} = 100 * N$ yani 100 kat arttırılmalıdır.

Diğer integration metodlarında hata $\frac{1}{N^{\frac{1}{d}}}$ (örneğin, trapezoid yönteminde) ile

orantılıdır. Bu durumda da, Monte Carlo integral yönteminin 1 boyut için, diğer yöntemler kadar verimli olamayacağı çok açıktır. Ancak standart sapma, integrasyon boyutumuzdan bağımsız olduğundan, yöntemimiz, boyutumuzun $d > 4$ olduğu durumlar için daha hızlı ve daha az hatalı sonuçlar verecektir. Buradan da

anlaşılabileceği gibi, yüksek boyutlu integral alma işlemlerinde Monte Carlo yöntemi daha avantajlı haldedir.

3.2 Sayısal İntegrasyon

Elektromanyetik problemlerin çözümünde çok sıklıkla analitik olarak çözilemeyen problemlerle karşılaşırız. Özellikle çok boyutlu integral alma gerekliliklerinde hesaplamalar oldukça yüksek maliyetli ve de uzun süreli olmaktadır.

Monte Carlo yönteminde mantık, integre edilecek fonksiyonun parçasının, integrasyon aralığında normalize olasılık yoğunluk fonksiyonu olarak düşünülebileceği temeline dayanır.

Yöntemde, integralin yakınsaması kuadratik formüllerin aksine boyuttan bağımsızdır. İntegrasyon boyutu arttıkça, kuadratik formüller daha karmaşık hale gelirken, Monte Carlo yönteminin formülasyonu ve hata büyüklüğü değişmez. Böylelikle, yüksek boyutlu integral alınması gereken problemlerde, 4- veya daha yüksek boyutlu integrallerinin, bu olasılıksal yöntemle çözümleri daha elverişli hale gelir. Bir çok integral fonksiyonuna da rahatlıkla uygulanabilen bir yöntemdir ve oluşacak hata işlem yapılmadan önce yaklaşık olarak rahatlıkla kestirilebilir.

Genel olarak Monte Carlo yöntemi şu şekildedir. Herhangi bir R bölgesinde f fonksiyonunun integralini almak isteyelim.

$$I = \int_R f \quad (3.8)$$

$x=(x^1, x^2, \dots, x^d)$, d integral boyutunu göstermek üzere, böyle bir integralin kuadratik olarak toplam şeklinde gösterilimi,

$$I = \int_R f(x) dx = \Delta x^d \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \dots \sum_{i_d=1}^N f(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_d}^d) \quad (3.9)$$

şeklinde. d boyutu çok arttığında ise, bu formülün çözümü gittikçe karmaşıklaşır. Örneğin, biz her boyut için $N_b=10$ örnek elemanı kullandığımız durumda bile, toplam almamız gereken örnek sayısı, 5 boyut için, $N=N^d=10^5=100000$ 'dur. Bu

durumda problem, çözülmesi oldukça zor bir problem haline dönüşür. Bu örnek sayısı için, trapezoid yönteminde oluşacak hata, $\frac{1}{N^{\frac{2}{d}}} = \frac{1}{100000^{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{100} = 0.01$; buna

karşılık Monte Carlo yönteminde meydana gelecek hata ise, $\frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{100000}} = \frac{1}{316.22776} = 0.00316$ 'dır. Bu hesaplardan da görüldüğü gibi, boyut sayısı arttıkça Monte Carlo daha elverişli bir hale gelmektedir.

Böyle bir problem ise, Monte Carlo yönteminde basit bir toplama işlemi halindedir. $f(x)$ fonksiyonumuzu, $p(x)$, fonksiyonumuzun d boyutlu rasgele değişkenleri için, olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere, $f(x)=p(x)g(x)$ şeklinde yazalım. Bu olasılık yoğunluk fonksiyonu yardımıyla fonksiyonumuzdan X_k bağımsız örneklerini alırsak, Monte Carlo yaklaşımımızı,

$$\int f(x)dx = \int g(x)p(x)dx = E_p[g(X)] \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g(X_k) \quad (3.10)$$

olarak yapabiliriz. Bu yaklaşımın hatası, $\frac{1}{\sqrt{N}}$ olmasına rağmen, d boyutu için kuadratik formülünün karmaşık halinden dolayı tercih edilebilir bir haldedir.

R bölgesi, integrali alınacak $f(x)$ rasgele değişkeninin tanımlı olduğu bölge olmak üzere; bu bölgede düzgün bir dağılım gösteren olasılık yoğunluk fonksiyonu için Monte Carlo yöntemini uygulayalım. Bu durumda, $f(x)$ rasgele değişkeninin beklenen değeri,

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{R} \int_R f = \frac{I}{R} \quad (3.11)$$

varyansı ise,

$$Var(f(x)) = \frac{1}{|R|} \int_R f^2 - \left(\frac{1}{|R|} \int_R f \right)^2 \quad (3.12)$$

ve R bölgesi de,

$$|R| = \int_R dx \quad (3.13)$$

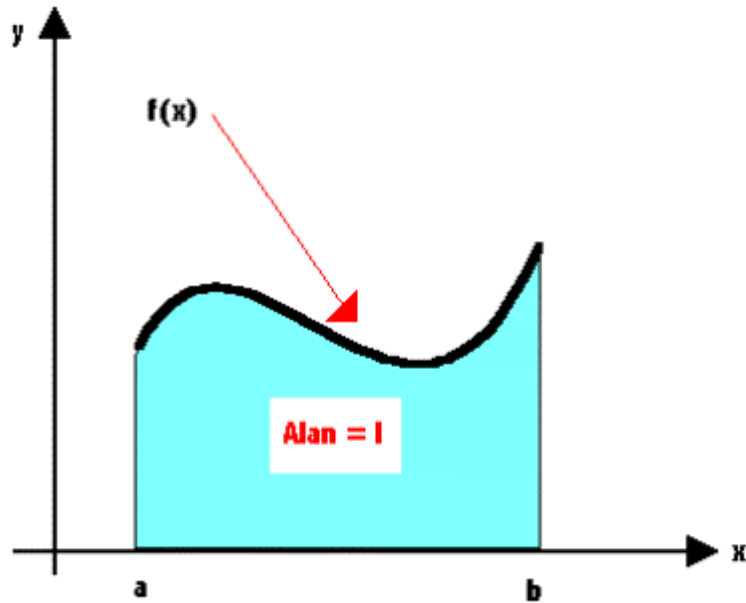
'dir. x değerinden, x ile aynı olasılık dağılımına sahip, N tane bağımsız $x_1, x_2, \dots, x_N$ örneğinin beklenen değeri,

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_N)}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \quad (3.14)$$

'dir. Bu formül yardımıyla, $f(x)$ 'in gerçek beklenen değerine oldukça yakın sonuçlar elde edilebilir. (3.11) denklemi ile (3.14) denklemini birleştirirsek,

$$I = \frac{|R|}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \quad (3.15)$$

denklemini elde ederiz. Bu formül herhangi bir sonlu R bölgesindeki integrasyon için kullanılabilir.



Şekil 3.1 Monte Carlo İntegrasyonu

Örneğin, bu formülü 1-boyutlu aşağıdaki gibi bir integrale uygulamak isteyelim,

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad (3.16)$$

Bu denklemi (3.15)'daki gibi yazarsak,

$$I = \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \quad (3.17)$$

denklemini elde ederiz. Burada x_i , (a, b) aralığında üretilmiş rasgele bir sayıdır.

Aşağıdaki gibi 2-boyutlu bir integral alıp,

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x^1, x^2) dx^1 dx^2 \quad (3.18)$$

Monte Carlo formülünü uygulamak istersek,

$$I = \frac{(b-a)(d-c)}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i^1, x_i^2) \quad (3.19)$$

denklemini elde ederiz. Burada, x_i^1 , (a, b) arasında, x_i^2 ise, (c, d) arasında rasgele üretilmiş noktalardır.

3.2.1 Reddetme (rejection veya hit & miss) yöntemi

Öncelikle, Monte Carlo yöntemini, belirli integral değerini bulmada kullanacağımız reddetme yöntemi ile inceleyelim. Bu yöntem uygulanmak istendiğinde, öncelikle, seçilen bir dağılım fonksiyonu kullanılarak elde edilen rasgele değerlerden çözüme gidilmeye çalışılır.

Aşağıdaki belirli integralin değerini bulmak isteyelim,

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad (3.20)$$

Öncelikle, $f(x)$ fonksiyonunu, fonksiyonu içine alan sınırlı bir bölgeye koyup, bu bölgeyi de küçük parçalara bölerek, bölgenin ne kadarının $f(x)$ fonksiyonun içinde kaldığı ile bir benzerlik kurup, integral değerimizi bulabiliriz. Bunu sınırlı bölgenin içinde rasgele noktalar seçerek de yapabiliriz.

Böylelikle, integrali alınmak istenen alan, sayısal olarak hesaplamalarla değil, fonksiyonun içinde olduğu bölgenin rasgele üretilen noktalarla taranması ile bulunur. Fonksiyonun tanımlı olduğu bölgede seçilen rasgele noktaların kaçının fonksiyon eğrisinin altında bulunduğu, fonksiyonumuzun integral değerinin bulunmasına yardımcı olacaktır[21].

Bu yöntemin bilgisayar algoritması ise, şu şekildedir,

- Öncelikle fonksiyonun, Şekil 3.2'de görülebileceği gibi, integralinin alınması istenen bölgedeki sınırları belirlenir. Reddetme yönteminde fonksiyonu da içine alan bu sınırlandırılmış bölge, integralin alınmak istenildiği (x_{min}, x_{max}) aralığı ve $f(x)$ fonksiyonumuzun en yüksek değerinden daha büyük olan bir $f_{üst}$ değeri ile belirlenir.
- Taranacak bölge bu şekilde belirlendikten sonra bölge, (x_{min}, x_{max}) aralığında rasgele üretilen x_i değeri seçilir.
- **0 ile $f_{üst}$ arasında rasgele f_i değeri seçilir.**
- Eğer $f_i < f_{üst}$ ise, $I_i = f_{üst}(x_{max} - x_{min})$ olarak atanır, değilse $I_i = 0$ seçilir.
- Elde edilen bu I_i değerlerinin ortalaması bulunarak, integral değerine erişilir.

Bu algoritmaya,

$$I = \int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x) dx = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{f(x)}{p(x)} p(x) dx \quad (3.21)$$

formülünün bir nevi özel hali olarak bakabiliriz. Bu formülde, 3.2.4 Önem örnekleme (importance sampling) yönteminde anlatılacağı gibi, bir olasılık yoğunluk fonksiyonuna dayalı örnek seçimi yer almaktadır ve integral çözümüne de,

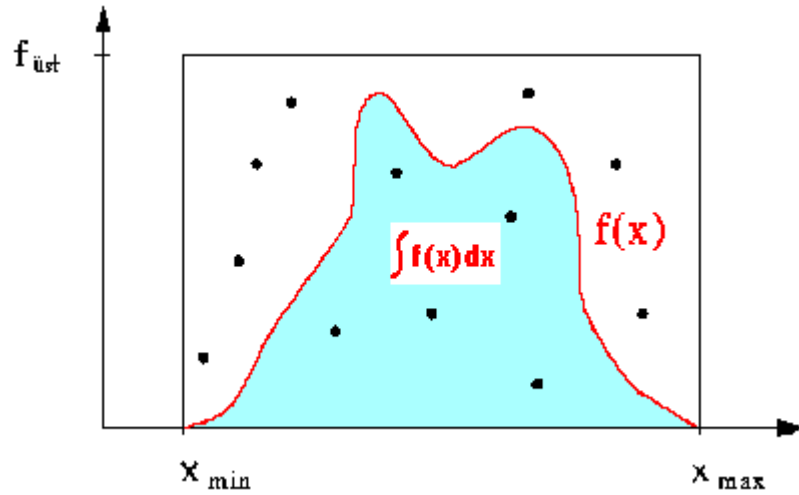
$$I_i = \frac{f(x_i)}{p(x_i)} \quad (3.22)$$

değerinin ortalamasının hesaplanması ile erişilir. Burada seçilen olasılık dağılımı (x_{min}, x_{max}) aralığında düzgün dağılan,

$$p(x) = \frac{1}{(x_{max} - x_{min})} \quad (3.23)$$

'dir. Burada yapılan denemelerin değeri, $\frac{f(x_i)}{f_{üst}}$ olasılığı ile, $\frac{f_{üst}}{p(x_i)}$ değerini;

$1 - \frac{f(x_i)}{f_{üst}}$ olasılığı ile 0 değerini almaktadır[22].



Şekil 3.2 Reddetme yöntemi

Bu algoritmanın pratik olarak açıklaması ise, seçilen noktaların kabul veya reddedilmesi olarak yapılabilir. Bu işlem bir nevi, şu şekilde de yapılabilir; seçilen rasgele noktalar, eğer $f(x)$ eğrisinin altında kalıyorsa kabul, üstünde kalıyorsa reddedilerek, toplam yapılan denemeden kaç tanesinin başarılı sonuç verdiği hesaplanır.

Bu işlemin sonucunda, toplam deneme sayısının başarılı denemelere oranı, toplam alan ile integrali alınmak istenen $f(x)$ fonksiyonunun alanı arasındaki oranı verecektir.

Bu eşitliği formülize edersek,

$$I = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x)dx \approx \frac{N_{kabul}}{N_{toplam}} f_{üst}(x_{\max} - x_{\min}) \quad (3.24)$$

denklemini elde ederiz. Bu yöntemin standart sapmasını, binominal dağılımın varyans formülü ile hesaplırsak, $p = \frac{N_{kabul}}{N_{toplam}}$ olmak üzere,

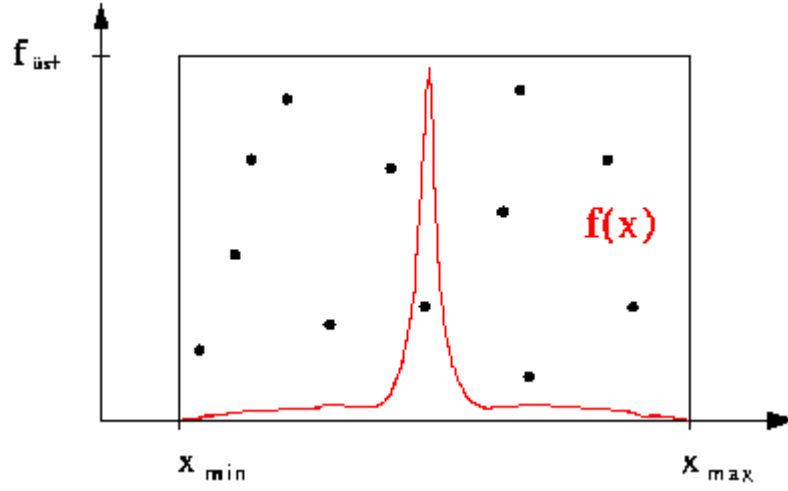
$$\sigma(N_{kabul}) = \sqrt{p(1-p)N_{toplam}} \quad (3.25)$$

'dur. Buradan, integral değerinin varyansı, doğrudan N_{kabul} değerine bağlı olduğundan, hatanın N değerine göre değişimini bulmak istersek,

$$\begin{aligned} \sigma(I)^2 &= \frac{\sigma(N_{kabul})^2}{N_{kabul}^2} \quad (3.26) \\ &= \frac{N_{kabul}}{N_{toplam}} \left(1 - \frac{N_{kabul}}{N_{toplam}}\right) N_{toplam} \frac{1}{N_{kabul}^2} \\ &= \frac{1}{N_{kabul}} - \frac{1}{N_{toplam}} \\ &= \frac{1}{N_{toplam}} \left(\frac{1-p}{p}\right) \end{aligned}$$

elde edilir, denklemden de görülebileceği gibi, hata $\frac{1}{\sqrt{N_{toplam}}}$ ile ilişkilidir.

Reddetme yöntemi, bir veya daha fazla keskin tepesi olan fonksiyonlar için uygun bir yöntem değildir. Şekil 3.3'ten görülebileceği gibi, belirlenen alanda daha büyük bir yer kaplamasına rağmen fonksiyonumuzun altında, denenen sadece bir nokta kalmış ve kabul edilmiştir. Böyle bir durumda, toplam deneme sayısı ile kabul gören noktaların oranı, toplam alan ile fonksiyon alanına oranından oldukça uzak bir değer çıkması engellenemez.



Şekil 3.3 Reddetme yöntemi için verimli olmayan keskin tepeli fonksiyonlar

Reddetme yönteminde kullanılan örneklerin birbiri ile korelasyonu (ilintisi) yoktur. Yöntemin dezavantajı ise, bölge sınırlarının yanlış belirlenmesi durumunda ortaya çıkar. Eğer deneme bölgesi, gerçek fonksiyonu oldukça iyi bir şekilde içine alıyorsa ve yakından takip edebiliyorsa verimlidir. Aksi takdirde, reddedilen noktalarla oldukça vakit kaybedilebilir.

3.2.2 Ortalama (averaging) yöntemi

Bu yöntem, fonksiyonun integral değerinin bulunmasında doğrudan fonksiyonun $f(x)$ değerinin kullanılmasından dolayı, probleme daha doğru bir yaklaşım sağlar. Ortalama yöntemi de rasgele seçilen noktalar üzerinde işlemler yapar. Reddetme yönteminden farklı olarak, alan taramak yerine, seçilen noktalardaki fonksiyonun değerleri, aranılan integralin bulunmasında kullanılır. Yine

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (3.27)$$

denklemini ele alalım. V bölgenin hacmi olmak üzere ve

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ değişkeni bölgenin içinde,} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (3.28)$$

bu denklemi verimli bir yaklaşım ile şu şekilde yazabiliriz.

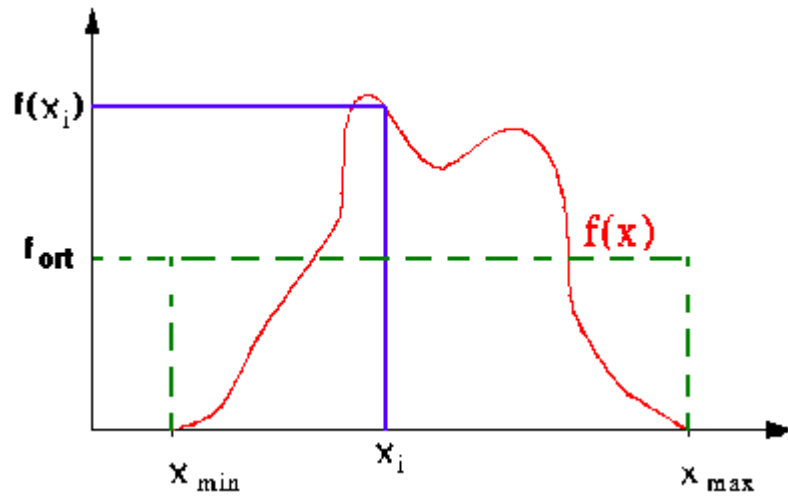
$$I = \int_a^b f(x)g(x)dx = \frac{1}{V} \int_a^b f(x)g(x)Vdx \quad (3.29)$$

olarak belirlersek, 3.29 denklemi, x rasgele değişkeninin bölge içerisinde uniform dağıldığı durum için, $h(x)=g(x)f(x)V$ fonksiyonunun beklenen değeri olarak yorumlanabilir.

Bu yaklaşım altında,

$$I \approx \frac{1}{n} \sum_i^n h(x_i) = \frac{V}{n} \sum_i^n f(x_i) \quad (3.30)$$

yazılabilir[21,22].



Şekil 3.4 Ortalama Yöntemi

Bu yöntemin bilgisayar algoritması ise şöyledir,

- (x_{min}, x_{max}) aralığında rasgele üretilen x_i değeri seçilir.
- $I_i = f(x_i) (x_{max} - x_{min})$ olarak doğrudan hesaplanır.
- Elde edilen bu I_i değerlerinin ortalaması bulunarak, integral değerine erişilir.

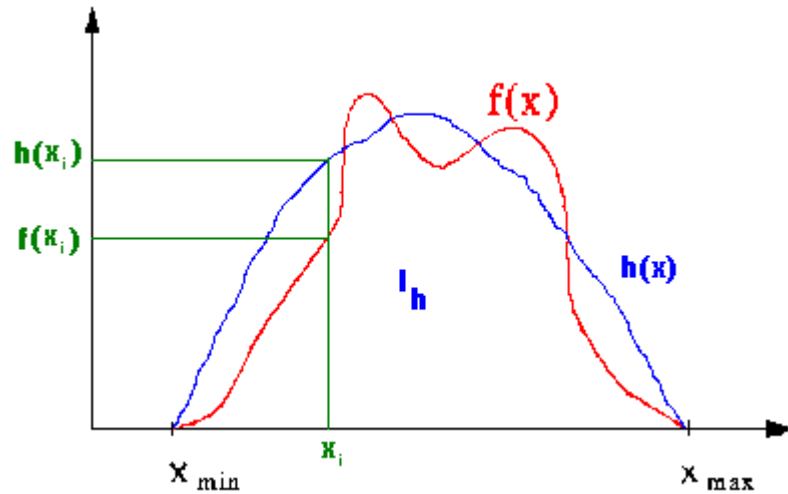
Yine bu algoritmada kullanılan formül, integral hesaplamasında kullanılan (3.21) denkleminde, olasılık yoğunluk fonksiyonu olarak, $p(x_i)$ değeri yerine,

$$p(x) = \frac{1}{(x_{\max} - x_{\min})}$$
 konulması sonucu elde edilmiş bir formüldür.

Fonksiyona dayalı örnekleme, çok hızlı ve çok basit kullanımı olduğundan oldukça avantajlı bir yöntemdir ve kullanılan örneklerin birbiri ile korelasyonu yoktur. Yöntemin uygulanabilirliği, fonksiyonun analitik bir ifadesi olması gerektiğinden kısıtlıdır.

3.2.3 Kontrol değişkeni (control variates) yöntemi

Bu yöntemde, integrali alınmak istenen $f(x)$ fonksiyonuna oldukça yakın, bir $h(x)$ yardımcı fonksiyonu kullanılır. Bu yardımcı fonksiyonun integral değeri, fonksiyonumuzdan daha kolay hesaplanabilir veya çözümü bilinen bir fonksiyon olmalıdır.



Şekil 3.5 Kontrol Değişkeni Yöntemi

Böylelikle seçilen her rasgele noktada, iki fonksiyonun farkından, integral değerleri arasındaki fark kestirilmeye çalışılarak, elde edilen değer, bilinen $h(x)$ fonksiyonun integral değerine eklenerek, aranan $f(x)$ fonksiyonun integral değerine ulaşılmaya çalışılır. $h(x)$ fonksiyonun integral değeri,

$$I_h = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} h(x) dx \quad (3.31)$$

Monte Carlo yaklaşımında ek bir doğruluk faktörü olarak işlemimize etkir ve algoritmamız şu şekildedir,

- $(x_{\min}, x_{\max})$ aralığında rasgele üretilen x_i değeri seçilir.
- $I_i = (f(x_i) - h(x_i)) (x_{\max} - x_{\min}) + I_h$ olarak doğrudan hesaplanır.

Burada, sadece varyans $(f(x_i) - h(x_i))$ farkından kaynaklanmaktadır ve I_h integral değerinin buna herhangi bir katkısı yoktur. Bu nedenle, $h(x)$ belirlenmesinde ne kadar iyi bir tahmin yaparsak, o kadar küçük bir varyans oluşur, bu da daha az hata ile sonuca ulaşmak demektir. $h(x) = f(x)$ durumunda en iyi yaklaşım fonksiyonunu kullanmış oluruz ve bunun sonucunda, integral sonucuna tam olarak ulaşarak, hatayı da ortadan kaldırmış oluruz.

$h(x) = f(x) + \text{sabit}$ durumunda da, oluşacak varyans sıfırdır ve yapılacak her tahmin doğrudur.

Yine (3.21) formülüne benzetmek istersek, $p(x) = \frac{1}{(x_{\max} - x_{\min})}$ olmak üzere,

$$I_i = \frac{f(x_i) - h(x_i) + E(h(x_i))}{p(x_i)} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} & \frac{f(x_i) - h(x_i) + \frac{\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} h(x) dx}{\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx}}{p(x_i)} \\ &= \frac{f(x_i) - h(x_i) + \frac{I_h}{(x_{\max} - x_{\min})}}{p(x_i)} \end{aligned}$$

$$= \frac{f(x_i) - h(x_i)}{p(x_i)} + I_h$$

algoritmamızda kullandığımız formülü elde edebiliriz[22].

3.2.4 Önem örnekleme (importance sampling) yöntemi

Bu yöntem, kontrol değişkeni yöntemine oldukça benzer bir yöntemdir. Fakat burada aranan $f(x)$ fonksiyonunun hakkında kullanılan yardımcı fonksiyonun etkisi, toplamsal değil, çarpımsaldır.

Önem örneklemede amaç, fonksiyonun karakteristiğini belirleyebilecek ve fonksiyon hakkında en çok bilgi alınabilecek bölgelerden örnek alarak, bilgiye hızlı erişmektir. Böylelikle gereksiz nokta seçimlerinden kaçınılarak, vakit kaybı azaltılır ve işlem zamanının azaltılması sağlanır.

Bu yöntemde, kontrol değişkeni yönteminde integrali alınmak istenen fonksiyona benzer fonksiyon olarak kullanılan, $h(x)$ yaklaşım fonksiyonu örneklemede kullanılacak olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonunun elde edilmesinde kullanılır. Bu nedenle, $f(x)$ fonksiyonumuza ne kadar yakın bir $h(x)$ yaklaşım fonksiyonu kullanırsak, o kadar iyi sonuçlar elde ederiz.

$h(x)$ yaklaşım fonksiyonundan elde edilen olasılık dağılım fonksiyonunun tersi alınarak, rasgele sayılar üretildiğinden bu yöntem *ters (inverse) teknik* olarak da adlandırılır.

Öncelikle bu yöntemi uygulamak için, integrali alınabilen, ya daha önceden belirlenmiş uygun bir olasılık yoğunluk fonksiyonu ya da fonksiyonumuza yakın olan bir fonksiyon ele alınarak işlem yapılır.

Bir yaklaşım fonksiyonunu kullanacak olursak, $h(x)$ yaklaşım fonksiyonunun, $f(x)$ fonksiyonumuzun integrali alınacağı bölgede integralinin alınması gerekmektedir.

$$I_h = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} h(x) dx \quad (3.33)$$

Böylelikle yaklaşım fonksiyonumuzu, elde ettiğimiz integral değerine bölüp normalize ederek, integrali alınacak $f(x)$ fonksiyonumuza uygun bir olasılık yoğunluk bir fonksiyonu elde ederiz.

$$p(x) = \frac{h(x)}{\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} h(x) dx} = \frac{h(x)}{I_h} \quad (3.34)$$

Artık bir olasılık yoğunluk fonksiyonu elimizde olduğuna göre, fonksiyonumuza yöntemimizi uygulayabilir. (3.21) denklemimiz bu durumda,

$$I_i = \frac{f(x_i)}{p(x_i)} = \left[\frac{f(x_i)}{h(x_i)} \right] I_h \quad (3.35)$$

haline dönüşecektir. En ideal çözüm, $h(x)=f(x)$ olduğu durumda gerçekleşecektir ve 0 varyanslı yani hatasız bir sonuç ortaya çıkacaktır. Aynı zamanda, normalize $p(x)$ değeri aynı çıkacağından, $h(x)=f(x)$ *sabit* durumunda da hatasız çözüm geçerlidir.

Şimdi bu sonuca nasıl ulaştığımızı inceleyelim; örneğin, bir $f(x)$ fonksiyonunun, $x=(x^1, x^2, \dots, x^d)$ olmak üzere, çok boyutlu bir R bölgesinde integralini almak isteyelim. Bu $f(x)$ fonksiyonunu, R hacminde tanımlı seçtiğimiz bir olasılık fonksiyonu $p(x)$ ile işleme sokarak,

$$\int_R f(x) dx = \int_R \left(\frac{f(x)}{p(x)} \right) p(x) dx = \int_R g(x) p(x) dx \quad (3.36)$$

şeklinde tekrar yazabiliriz. Böylelikle, $f(x)$ fonksiyonundan düzgün yoğunluklu dx operatörü ile örnekler almak yerine, dönüştürüldüğü $g(x)$ fonksiyonu sayesinde daha uygun bir olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip $p(x)dx$ ile örnekler alınır.

Bu olasılık yoğunluk fonksiyonunu R bölgesinde tanımladığımızdan dolayı,

$$\int_R p(x) dx = 1 \quad (3.37)$$

'dir. Böylelikle, bu olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip, R bölgesindeki x_i örneklerini istediğimiz olasılık yoğunluk fonksiyonuna uygun olarak seçebiliriz.

Bu dönüşüm sayesinde integral denklemimiz,

$$I \equiv \int_R f(x) dx = \int_R \frac{f(x)}{p(x)} p(x) dx \approx \left\langle \frac{f(x)}{p(x)} \right\rangle \pm \sqrt{\frac{\left(\frac{f(x)^2}{p(x)^2} \right) - \left(\frac{f(x)}{p(x)} \right)^2}{N}} \quad (3.38)$$

haline dönüşür. Denklemde $\left\langle \frac{f(x)}{p(x)} \right\rangle$ olarak gözüken terim N örneğin aritmetik ortalamasını göstermektedir. $\pm$ olarak gözüken terim ise, hata kestiriminin standart sapmasıdır[23].

Bu yöntemde belirlemesi gereken ise, olasılık yoğunluk fonksiyonunun nasıl seçileceğidir. Burada $p(x)$ fonksiyonu, hatayı minimum yapacak şekilde seçilmelidir.

Bu ancak, karekök içindeki ifadeye en küçük değeri aldıracak olan, $g(x) = \frac{f(x)}{p(x)}$

ifadesini bir sabite eşit hale getirerek mümkündür.

$\left\langle \frac{f(x)}{p(x)} \right\rangle$ terimi Monte Carlo integralinin kestirimi olduğundan, hata terimini tekrar ele alalım,

$$S = \left\langle \frac{f(x)^2}{p(x)^2} \right\rangle - \left\langle \frac{f(x)}{p(x)} \right\rangle^2 \approx \int_R \frac{f(x)^2}{p(x)^2} p(x) dx - \left[\int_R \frac{f(x)}{p(x)} p(x) dx \right]^2 = \int_R \frac{f(x)^2}{p(x)} dx - \left[\int_R f(x) dx \right]^2 \quad (3.39)$$

Hatayı minimum yapmak için, Lagrange çarpanını denklemimize ekleyip, eşitliğimizi p 'ye göre türeterek çözüme gitmeye çalışalım,

$$0 = \frac{\partial}{\partial p} \left(\int_R \frac{f(x)^2}{p(x)} dx - \left[\int_R f(x) dx \right]^2 + \lambda \int_R p(x) dx \right) \quad (3.40)$$

Ortadaki terim $p(x)$ 'ye bağılı olmadığından, $p(x)$ seçiminde onu gözardı edebiliriz. Bu durumda, $0 = -\frac{f(x)^2}{p(x)^2} + \lambda$ olacağından, fonksiyonumuzun integralini almak için kullanacağımız olasılık yoğunluk fonksiyonunun en ideal hali,

$$p(x) = \frac{|f(x)|}{\lambda} = \frac{|f(x)|}{\int |f(x)| dx} = \frac{|f(x)|}{I} \quad (3.41)$$

olacaktır[23]. Monte Carlo örneklerinin seçiminde kullanacağımız, olasılık yoğunluk fonksiyonumuz $p(x)$ böyle seçildiği takdirde, formülümüzdeki $\frac{f(x)}{p(x)}$ oranımızın varyansı 0'a azalacaktır. Bu sadece analitik olarak bildiğimiz fonksiyonlarda tam olarak belirlenebilir, bu durumda da fonksiyonumuzun analitik olarak çözümünü yapabiliriz. Fonksiyonumuzun tam değerini bilmediğimiz durumlarda ise, fonksiyonumuza benzer, bu yaklaşık $p(x)$ ifadesini kullanarak, integral değerimize yakın sonuçlar elde edebiliriz.

Bu durumda ise, integral çözümüne,

$$I = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(x_i)}{p(x_i)} \quad (3.42)$$

formülüyle yaklaşmaya çalışırız. $p(x)$ fonksiyonu $f(x)$ fonksiyonunun değerine ne kadar yakınsa, bu formül yardımıyla elde ettiğimiz değer, o kadar aradığımız integral değerine eşittir.

Bu yöntemde oluşan hata ise (3.7) denkleminde biraz farklılık gösterir. $\sigma(x)$ 'in ifadesine, olasılık yoğunluk fonksiyonu da girdiğinden dolayı,

$$\sigma(x)^2 = \int_R \frac{f(x)^2}{p(x)} dx - I^2 \quad (3.43)$$

şeklini alacaktır.

$$\int_R \frac{f(x)^2}{p(x)} dx \left(\int_R f(x)^2 dx \right) \quad (3.44)$$

olduğundan dolayı meydana gelecek hata, daha küçüktür.

$f(x)$ fonksiyonu bilinemese bile, onun hakkındaki her ek bilgi $p(x)$ fonksiyonumuzu belirlenmesinde ve böylelikle oluşacak hatanın azaltılmasına faydalı olacaktır. Unutulmaması gereken bir nokta da, olasılık yoğunluk fonksiyonu ne kadar karmaşık olursa, hesaplama maliyetinin de o kadar yükseleceğidir.

Fonksiyonumuzun negatif değerler aldığı durumlarda, seçeceğimiz olasılık yoğunluk fonksiyonumuz negatif değerler alamayacağından dolayı, fonksiyonumuza bir sabit ekleyerek, tamamen pozitif hale dönüştürebiliriz. Bu durumda ise, elde ettiğimiz integral değerimizden, *(sabit * bölge büyüklüğümüz)* kadar bir değeri çıkartmamız gerekecektir.

4. MONTE CARLO YÖNTEMİNİN UYGULAMALARI

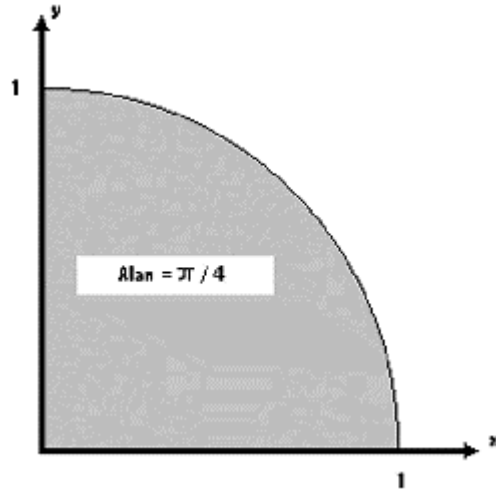
Analitik integral alma yöntemlerinde, elde edilmek istenen integralin değeri, belirli adımlarda fonksiyon değerlerinin hesaplanması ile yapılmaktadır. Bu fonksiyon değerleri, sanki fonksiyon dikdörtgen alanlara parçalanmış gibi, adım büyüklüğü ile çarpılır ve elde edilen parça dikdörtgen alanların toplamı ile integral değerine yakınlanır. Gerçek integral değerine ne kadar iyi yaklaşılmak isteniyorsa, adım sıklığını da o kadar arttırmak gerekmektedir. Bu da fonksiyonun sabit değişim gösterdiği bölgelerde klasik yöntemleri oldukça verimsiz bir hale getirmektedir. Adım sıklığını azaltmak da fonksiyonun hızlı değişikliklerini kaybedilmesine yol açmaktadır. Bu da yüksek dereceli veya karmaşık yapıları fonksiyonlarda analitik yöntemi oldukça verimsiz bir hale getirmektedir.

Buna karşılık Monte Carlo yönteminde, fonksiyonun yavaş değişimlerinde az, hızlı değişimlerinde ise çok örnek alınmasını sağlayacak olasılık yoğunluk fonksiyonları kullanılabilir. Örneklerin seçimi fonksiyonun boyutundan bağımsız olduğundan, fonksiyonun karmaşıklığı çözüme herhangi bir etkide bulunmaz. Hatta yöntem, fonksiyon karmaşıklıkça analitik yöntemlerden daha iyi ve hızlı bir yakınsama sağlar. Tabii bunların yanında Monte Carlo yöntemini uygulayabilmek için bazı noktalara dikkat edilmelidir. Yardımcı fonksiyonların veya olasılık yoğunluk fonksiyonlarının iyi belirlenmediği durumlarda yöntem avantajlarını tamamiyle kaybedecektir.

4.1 Monte Carlo Yöntemine İlişkin Örnekler

Monte Carlo yönteminin avantajlarını ve de dezavantajlarını anlamak için, yöntemi çeşitli örnekler ve örnekleme teknikleri açısından inceleyelim:

Bu örneklerde Monte Carlo yöntemi kullanılarak bulunmaya çalışılan π 'nin değeri, alanı $\pi / 4$ olan birim çeyrek daire alanından ters işlem yapılarak elde edilmiştir.



Şekil 4.1 π değerinin bulunmasında kullanılacak çeyrek daire

Bilindiği gibi koordinat düzleminde bir dairenin denklemi, r yarıçap olmak üzere,

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (4.1)$$

Şeklinde dir. Birim dairenin yarı çapı 1 olduğundan,

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (4.2)$$

Yazabiliriz. Bu denklemde, y 'yi x cinsinden elde etmek istersek,

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad (4.3)$$

Şeklinde yazabiliriz. Böylece, verdiğimiz her x 'e karşılık düşen y değerini kolaylıkla bulabiliriz. Örneklerimizde bu bağıntı kullanılarak, x ve y çiftleri işleme sokulmuştur.

Bir dairenin de alanı bilindiği gibi,

$$\text{Alan} = \pi r^2 \quad (4.4)$$

'dir. Birim daire ile ilgilendiğimizden alanımızın değeri, π 'dir. Monte Carlo yöntemi kullanılarak alanı bulunacak olan bölgenin alanı $\pi/4$ olan çeyrek daire olduğundan, bu çeyrek dairenin alanını bularak, π değerine de ulaşmış oluruz.

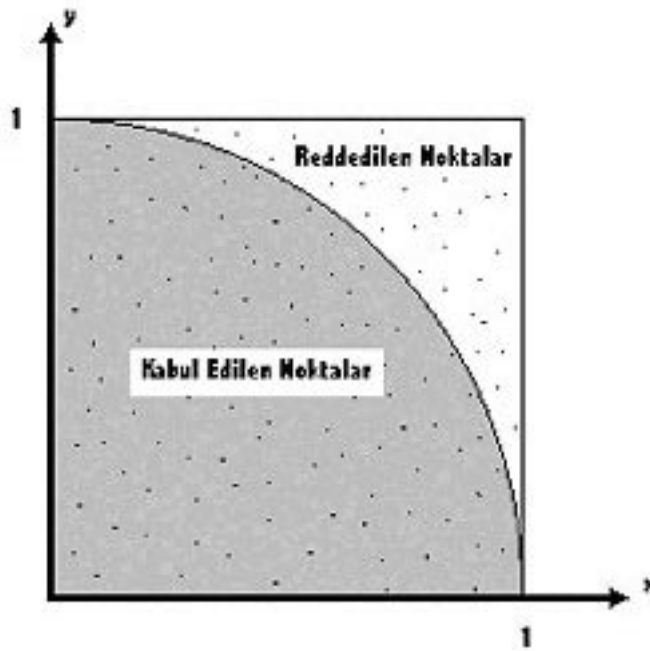
Bu değere analitik yollarla ulaşmamız ise, pek mümkün değildir. Denklem (4.3) 'ün (0,1) aralığında integralini almak istediğimizde, analitik olarak yalnızca,

$$y = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{\text{Arcsin}(x)}{2} = \frac{\pi}{4} \quad (4.5)$$

Değerini elde edebiliriz. Bu da bizim π sayısına doğrudan ulaşmamızı sağlayamaz.

4.1.1 Reddetme yönteminin uygulanışı ve sonuçları

Reddetme yönteminde amaç, nümerik bir değer bulmaktan çok, integre edilmek istenen eğri alanının -rasgele üretilen sayılardan elde edilen- noktalarla taranarak, integrali alınmak istenen bölgedeki noktalarla, toplam nokta sayısı arasında bir oran bulmaktır[EKLER].



Şekil 4.2 π değerinin reddetme yöntemi ile bulunması

Üretilen bu rasgele sayıların, kaçının eğrinin altında, kaçının eğrinin üstünde kaldığının oranı, bu integralin değerini verecektir. Eğrinin altında kalan noktalar integral değerine eklenecek -yani kabul edilecek- eğrinin üstünde kalan noktalar ise, bulunmak istenen eğrinin integraline herhangi bir etkide bulunmayarak reddedilecektir. Böylelikle toplam nokta sayısı ile eğri altında kalan nokta sayısı

arasındaki oran, taranan toplam alan ile integrali bulunmak istenen alanın oranına eşit olacaktır.

Taranılacak alanın belirlenebilmesi için, fonksiyonun ilgilenilen bölgedeki en yüksek değerinin bilinmesi gereklidir. Reddedilen noktaların bizim için herhangi bir önemi ve de değeri yoktur, sadece meydana getirdikleri zaman kaybı ile işlem zamanının uzamasına neden olurlar. Bu nedenle reddedilen nokta sayısının minimuma indirilmesi amaçlanır ve nokta atışının yapılacağı bölgenin en iyi bir şekilde belirlenmesine çalışılır. Eğer gerektiğinden geniş bir alan taranırsa, reddedilecek nokta sayısı çok fazla artarak, büyük bir vakit kaybına neden olunur. Alan gereğinden küçük tutulduğu takdirde ise, integrali bulunacak olan bölgenin bir kısmı dışarıda kalacağından dolayı yanlış bir sonuç elde edilir.

Bu yöntemin dezavantajı, belirlenen bölgenin tamamının taranması gerekmesi ve reddedilen noktaların integrale herhangi bir katkısı olmamasından dolayı sadece vakit kaybına neden olmalarıdır.

Yapılan programda π değeri aşağıdaki değerlerde elde edilmiştir. Yapılan denemeler belirli bir işlem grubunun 1 kez ve 100 kez tekrarının ortalaması şeklinde verilmiştir,

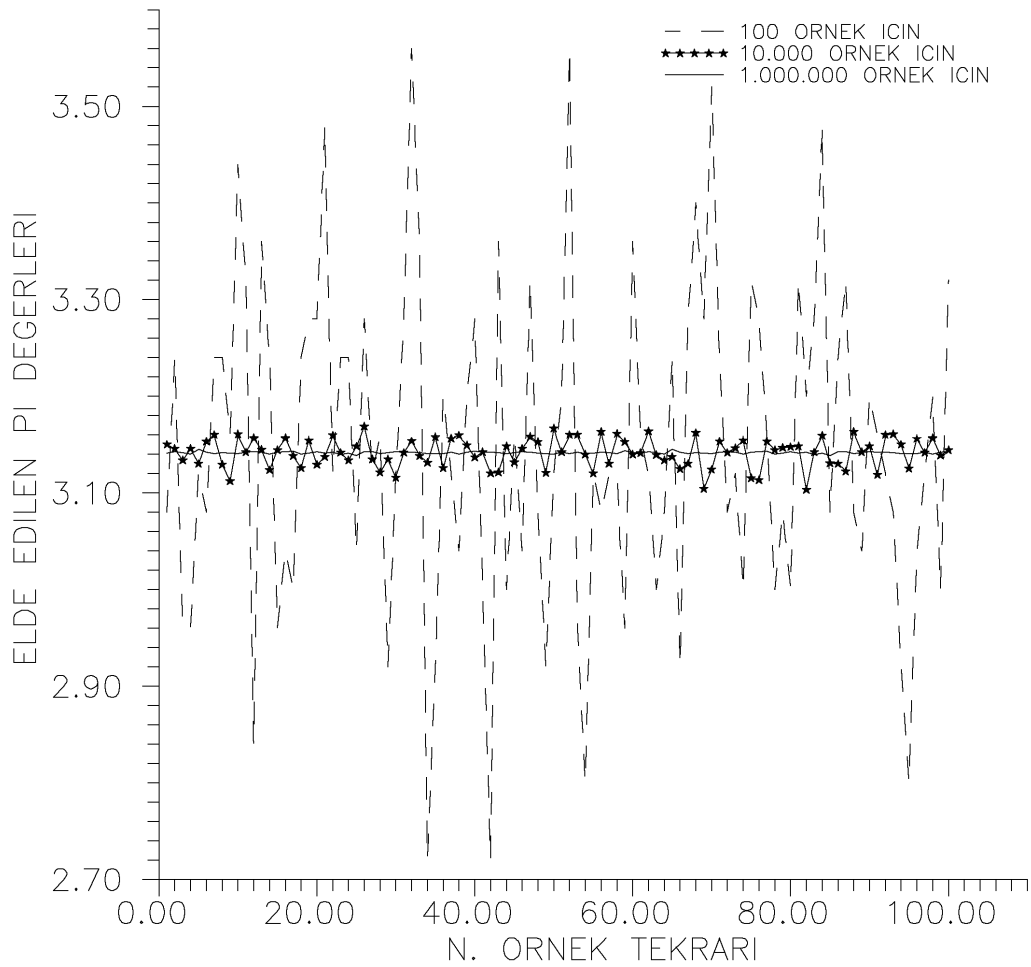
Tablo 4.1 Reddetme yöntemi ile elde edilen sonuçlar

1 Gruptaki Örnek Sayısı	1 Grup için π	π 'den Sapma%	100 grup için π	π 'den Sapma%
10	3.59999990	14.59155273	3.20000029	1.85916984
20	4.00000000	27.32395172	3.16599917	0.77688086
50	2.88000011	-8.32675171	3.16479945	0.73869252
100	3.35999990	6.95211554	3.14760041	0.19123012
500	3.30399990	5.16958046	3.13472056	-0.21874818
1 000	3.15599990	0.45859405	3.14639926	0.15299623
5 000	3.17280006	0.99335992	3.14001441	-0.05023983
10 000	3.14000010	-0.05069518	3.14178109	0.00599538
100 000	3.14463997	0.09699627	3.14184642	0.00807480
1 000 000	3.14141989	-0.00550209	3.14164448	0.00164683
10 000 000	3.14156008	-0.00103970	3.14161110	0.00058436

Tablodan da görülebileceği gibi, reddetme yönteminde π değerinden olan sapmalar, örnek miktarının çok arttırılmasına rağmen önemli bir iyileşme gösterememiştir. Bu da yöntemin, bu örnek için verimsizliğini göstermektedir. Burada rasgele sayı üreticinin de önemi çok büyüktür, eğer ideale yakın bir sayı üretici kullanmazsak, örneklerimiz

üretcin idealsizliğinden dolayı, bir bölgeye yoğunlaşarak alınacağından dolayı, o bölgenin karakterini gösterecek ve istediğimiz değere tam olarak yaklaşamamamıza neden olacaktır.

Monte Carlo yönteminin avantajları, boyut sayısı arttıkça ve nokta seçiminde, alınması istenen integrale uygun bir olasılık yoğunluk fonksiyonu seçildiğinde ortaya çıkar. Bu örnekteki incelememiz, 1 boyuta ilişkin ve nokta seçimi eşit olasılıkla yapıldığından dolayı *(uniform dağılımlı bir olasılık yoğunluk fonksiyonundan)* Monte Carlo yönteminin avantajları elde edilememiştir.



Şekil 4.3 Reddetme yöntemi ile elde edilen sonuçlar

Yukarıdaki şekilde reddetme yönteminin 100, 10.000 ve 1.000.000 örneğin 100'er kez alınmasına dair sonuçlar gözükmemektedir. Beklendiği gibi, 100 örnek alındığında, π 'den sapma miktarı oldukça fazladır. Bu saçılmanın miktarı örnek sayısı arttıkça azalmaktadır.

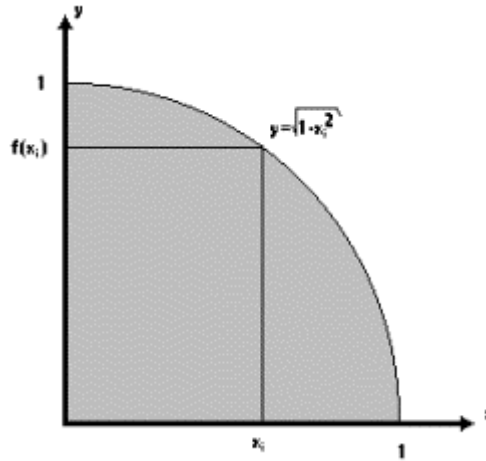
4.1.2 Ortalama yönteminin uygulanışı ve sonuçları

Ortalama yöntemi de rasgele seçilen noktalar üzerinde işlemler yapar. Fakat, reddetme yönteminden farklı olarak, alan taramak yerine, seçilen noktalardaki fonksiyonun değerleri, aranılan integralin bulunmasında kullanılır[EKLER].

Ortalama yönteminde öncelikle, verilen bir olasılık yoğunluğu ile fonksiyonun tanımlı olduğu x -koordinatında noktalar seçilir, ve bu rasgele seçilen noktalardaki fonksiyonun değeri hesaplanıp, bu değerlerin ortalama değeri ile integral değerine ulaşılmaya çalışılır.

Monte Carlo ortalama yönteminde amaç, ilgilenilen aralıkta fonksiyonun ortalama değerini bulmak ve bulunan bu ortalama değerini integralin alındığı aralığın büyüklüğü ile çarparak, integral değerine ulaşmaktır.

Burada yaptığımız örneğimizde, seçilen olasılık yoğunluk fonksiyonu, verilen aralıkta düzgün dağılımlı bir olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Bu yöntemin ileri uygulamalarında, bu olasılık yoğunluk fonksiyonu, fonksiyonun hızlı değişimlerini iyi takip edip, yakalayabilmesi açısından integrali alınmak istenen fonksiyona uygun olarak seçilmektedir. Bu ise, gerçekte değerleri bilinmeyen fonksiyonlarda, bir olasılık yoğunluk kestirimi yapma gerekliliğini getirmektedir.



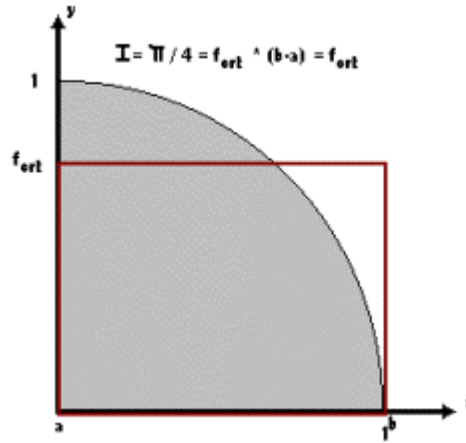
Şekil 4.4 Rasgele x noktalarına karşılık düşen fonksiyon değerleri

Yine reddetme yönteminde π değerini bulmakta kullandığımız çeyrek birim daireyi ele alalım. Burada reddetme yönteminden farklı olarak, sadece x -ekseninden rasgele seçim yaparak, bu x -noktalarında,

$$y = \sqrt{1-x^2} \quad (4.6)$$

Fonksiyonumuzun y -değerlerini yani $f(x)$ değerlerini hesaplayalım.

Üretilen her x değeri için hesaplanan fonksiyonun ortalamasının, fonksiyonun ilgilendiğimiz aralıktaki ortalaması olduğunu varsayıp, bu elde edilen f_{ort} değerini aralık büyüklüğümüz $(b-a) = 1-0$ değeri ile çarparsak, integral değerimize ulaşmış oluruz.



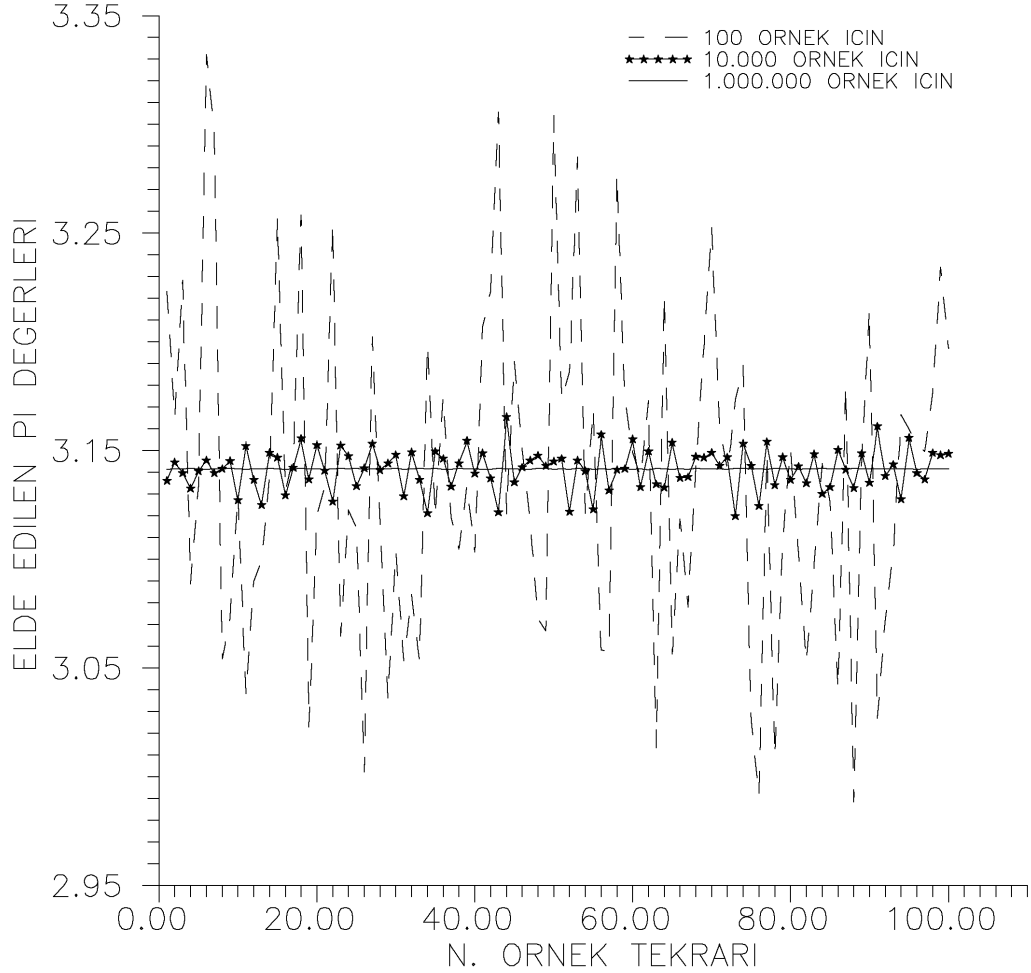
Şekil 4.5 Ortalama değeri yönteminde f_{ort} değeri ile integralin hesaplanması

Seçilen her noktaya ilişkin hesaplanan $f(x)$ değerlerinin hesaplanması ve bulunan bu değerlerin ortalamasının alınması sonucundaki değer bize fonksiyonun integrali alınan bölgedeki ortalamasını verecektir.

Tablo 4.2 Ortalama yöntemi ile elde edilen sonuçlar

1 Gruptaki Örnek Sayısı	1 Grup için π	π 'den Sapma%	100 grup için π	π 'den Sapma%
10	3.08693361	-1.73985410	3.18355846	1.33581042
20	3.41983771	8.85681248	3.13125420	-0.32908610
50	3.20412779	1.99055231	3.15607119	0.46086320
100	3.14914179	0.24029364	3.13762736	-0.12622190
500	3.13409901	-0.23853296	3.14176583	0.00550968
1 000	3.11435342	-0.86705452	3.14194894	0.01133811
5 000	3.12836456	-0.42106599	3.14182043	0.00724758
10 000	3.15522981	0.43408129	3.14157581	-0.00053882
100 000	3.13978648	-0.05749501	3.14159203	-0.00002276
1 000 000	3.14149690	-0.00305081	3.14159465	0.00006071
10 000 000	3.14158750	-0.00016696	3.14159703	0.00013660

Tablodan da görülebileceği gibi, örnek sayısını arttırmamıza rağmen hata sapmamızda önemli bir düşüş meydana gelmemiştir. Bunun sebebi, örneğimizin tek boyutlu bir integral olmasından kaynaklanmaktadır.



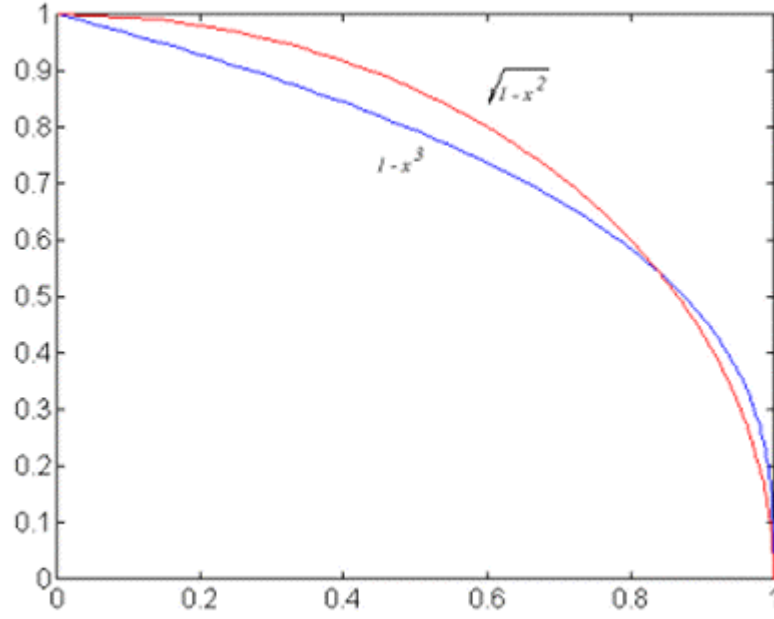
Şekil 4.6 Ortalama yöntemi ile elde edilen sonuçlar

Yukarıdaki şekilden de görülebileceği gibi, ortalama yöntemindeki π 'ye yaklaşım, reddetme yönteminden oldukça iyidir. Aynı örnek sayıları için, ortalama yöntemi daha iyi sonuçlar vermiştir ve sonuçların saçılımı reddetmeye göre oldukça azdır.

4.1.3 Kontrol değişkeni yönteminin uygulanışı ve sonuçları

Kontrol değişkeni yönteminde, integrali alınmak istenen fonksiyona, integral çözümünü bilinen ve de aradığımız fonksiyona oldukça benzer ve onu iyi takip eden bir fonksiyonla yaklaşılmaya çalışılır. Böylelikle seçilen her noktada, iki fonksiyonun farkından integral değerleri arasındaki fark kestirilmeye çalışılır ve elde edilen değer,

bilinen fonksiyonun integral değerine eklenerek aranılan integral değerine ulaşılır[EKLER].



Şekil 4.7 İntegralini bulmak istediğimiz $\sqrt{1-x^2}$ ve yaklaşım için kullanacağımız $(1-x^3)$ fonksiyonları

Örneğimiz için, çözümü bilenen, $y=1-x^3$ denklemini seçelim. Bu denklemin ilgilendiğimiz $(0,1)$ aralığında integrali alındığında elde edilen sonuç ise,

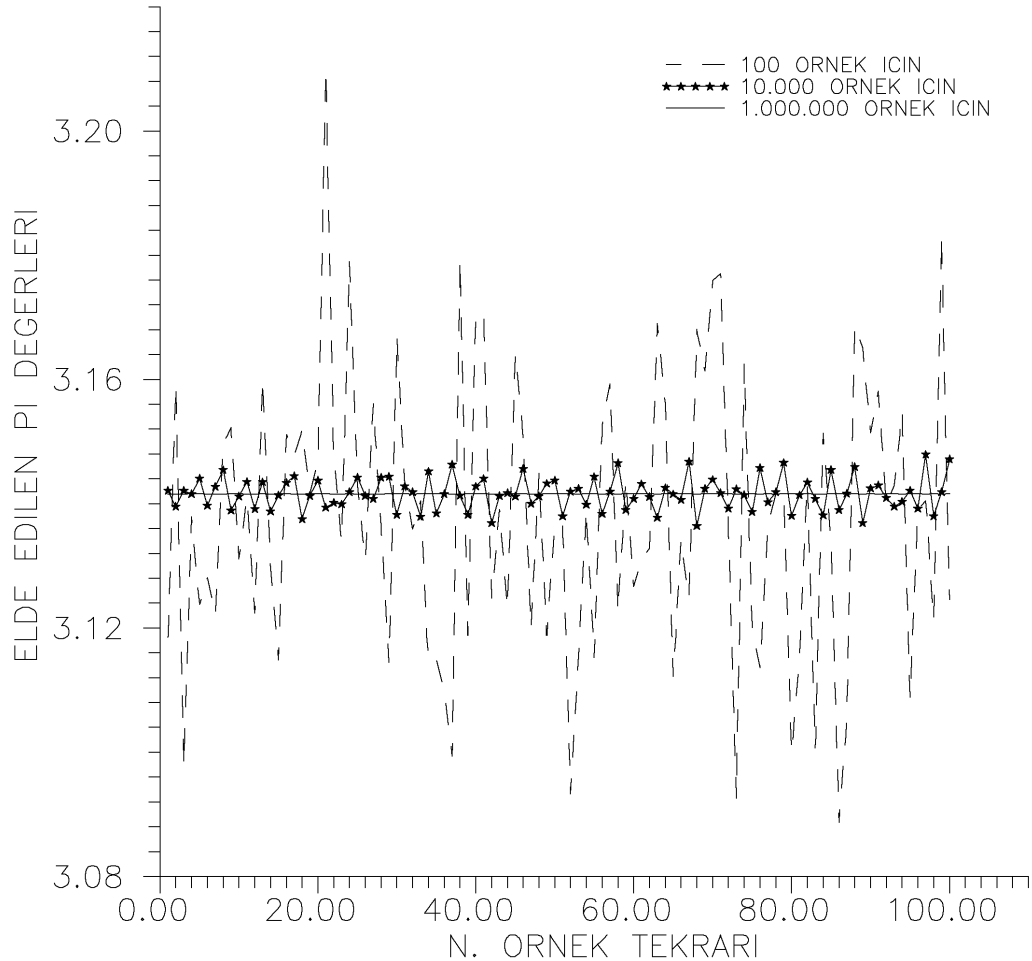
$$y = \int_0^1 (1-x^3) dx = \left(x - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \left(1 - \frac{1}{4} \right) - \left(0 - \frac{0}{4} \right) = \frac{3}{4} = 0.75 \quad (4.7)$$

'tir. Şekilden de görülebileceği gibi, çeyrek dairenin eğrisini oldukça iyi takip eden bir fonksiyondur.

Kontrol Değişkeni yönteminde de, ortalama yönteminde olduğu gibi, sadece x -koordinat düzleminde rasgele nokta seçimi yapılır. Bu seçilen rasgele x -noktasında her iki fonksiyonun da değeri hesaplanır ve bu iki fonksiyonun birbirinden farkı bulunur. Bu fark miktarı, seçilen her x -değeri için hesaplanarak bulunur. İşlemin sonunda bu farkların ortalaması alınarak ve tıpkı ortalama yönteminde olduğu gibi, aralık büyüklüğü olan $(b-a) = 1$ ile çarpılır. Böylelikle, aradığımız alan ile değerini bilinen fonksiyonun alanı arasındaki alan farkını yani fark integralinin değeri

bulunur. Bu fark, değeri bilinen fonksiyonun integral değerine eklenerek, bulmayı istediğimiz integral değerine yaklaşılr.

Bu yöntemde, elde edilen integral değeri, en kötü kestirimde bile (az sayıda örnek alınması veya rasgele noktaların seçiminde kullanılan olasılık yoğunluk fonksiyonunun idealden uzak olması durumunda), kontrol fonksiyonun integral değerine oldukça yakın bir değer alacağından dolayı, yaklaşımımız oldukça hızlı ve az sayıda nokta ile gerçekleşebilir durumdadır. Böylelikle her nokta için kestirim yapmak zorunda kalmayarak, en kötü tahmini yapsak bile, tanımsız noktalar için kontrol fonksiyonumuzun değerlerini atamış oluruz. Bu da kestirimizin doğru değerlere ulaşma hızını oldukça arttıracaktır.



Şekil 4.8 Kontrol değişkeni yöntemi ile elde edilen sonuçlar

Kontrol fonksiyonu kullanmanın avantajı, şekilden de açık bir şekilde görülmektedir. π değerinden saçılım, 100 örnekte bile, reddetme ve ortalama yöntemlerine göre oldukça azdır ve oldukça iyi bir yaklaşım göstermektedir.

Tablo 4.3 Kontrol fonksiyonu yöntemi ile elde edilen sonuçlar

1 Gruptaki Örnek Sayısı	1 Grup için π	π 'den Sapma%	100 grup için π	π 'den Sapma%
10	3.18462658	1.36980963	3.13206005	-0.30343494
20	3.06250596	-2.51741028	3.14630818	0.15009719
50	3.14506197	0.11042897	3.13627720	-0.16919896
100	3.12197566	-0.62443107	3.14052820	-0.03388532
500	3.14595604	0.13888811	3.14172602	0.00424230
1 000	3.14232850	0.02341995	3.14143682	-0.00496327
5 000	3.14549780	0.12430185	3.14157581	-0.00053882
10 000	3.13835812	-0.10296130	3.14157987	-0.00040981
100 000	3.14179111	0.00631413	3.14159465	0.00006071
1 000 000	3.14160132	0.00027320	3.14159274	0.00000000
10 000 000	3.14159393	0.00003794	3.14159298	0.00000758

Tablodaki elde edilen değerleri diğerleri ile karşılaştırdığımızda da sayısal sonuçların gerçek değere ne kadar hızlı yakınsadığını görüyoruz. Az sayıda örnek alınmasına rağmen, reddetme ve ortalama yöntemlerine göre oldukça hızlı bir yaklaşım göstermiştir ve aranılan değere oldukça yakın sonuçlar vermiştir.

Bu yöntemin en temel zorluğu, integralini bulmaya çalıştığımız fonksiyonu iyi takip eden bir fonksiyon bulmaktır. Kestirimci fonksiyonun iyi tahmin edilemediği durumlarda, bu yöntem bize yarardan çok zarar getirecektir. Bu yanlış kestirim nedeniyle, yaklaşım hızımız oldukça düşecek, doğru sonuca ulaşmak için çok sayıda örnek almamız gerekecek ve sonuçlar gerçek değerden uzak çıkarak, oldukça büyük hatalara neden olabilecektir.

Yöntemin ikinci can alıcı noktası ise, olasılık yoğunluk fonksiyonun seçimidir. Bu yöntemde, olasılık yoğunluk fonksiyonun seçimi, diğer yöntemlerde olduğu gibi, integrali aranılan fonksiyonun hızlı değişimlerini takip edip, bu değişimlerde daha fazla nokta seçecek şekilde değildir. Kestirim fonksiyonu ile integrali bulunulmaya çalışılan fonksiyon arasındaki farkların iyi yakalanabilmesi gerektiğinden, olasılık yoğunluk fonksiyonunun seçimi bu fark fonksiyonuna dayanılarak yapılacaktır.

Bu yöntem, integrali bulunacak fonksiyonun yaklaşık olarak bilinmesi ve de bu fonksiyona oldukça yakın ve integrali bilinen bir fonksiyon olduğunda oldukça avantajlıdır. Diğer yöntemlere göre de oldukça hızlı yaklaşmaktadır. Kestirim fonksiyonunun belirlenmesi oldukça hassas bir kriter olduğundan, hatalı fonksiyon seçilmesi durumunda, yöntem avantajlarını gösteremeyerek, diğer yöntemlerin bile daha verimsiz hale dönüşebilecektir.

4.1.4 Önem örnekleme yönteminin uygulanışı ve sonuçları

Bu yöntem, kontrol değişkeni yöntemine oldukça benzer bir yöntemdir. Fakat burada aranan $f(x)$ fonksiyonunun hakkında kullanılan yardımcı fonksiyonun etkisi, toplamsal olarak değil çarpımsal olarak.

Önem örneklemede amaç, fonksiyonun karakteristiğini belirleyebilecek ve fonksiyon hakkında en çok bilgi alınabilecek bölgelerden örnek alarak, bilgiye hızlı erişmektir. Böylelikle gereksiz nokta seçimlerinden kaçınılarak, vakit kaybı azaltılır ve işlem zamanının azaltılması sağlanır.

Bu yöntemde, kontrol değişkeni yönteminde integrali alınmak istenen fonksiyona benzer fonksiyon olarak kullanılan, $h(x)$ yaklaşım fonksiyonu örneklemede kullanılacak olasılık yoğunluk fonksiyonunun elde edilmesinde kullanılır. Bu nedenle, $f(x)$ fonksiyonumuza ne kadar yakın bir $h(x)$ yaklaşım fonksiyonu kullanırsak, o kadar iyi sonuçlar elde ederiz.

En iyi sonuç, $h(x)=f(x)$ olduğu durumda elde edilir. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ olarak bildiğimizden dolayı, bu fonksiyona uygun olarak olasılık yoğunluk fonksiyonunu elde ederek, 0 varyanslı sonuca ulaşmamız daha kolaydır.

Şu bir gerçektir ki, önem örnekleme yöntemi hiçbir zaman kontrol değişkeni yöntemi kadar iyi sonuç veren bir yöntem değildir. Ama uygun fonksiyon seçilmesi durumunda, reddetme ve ortalama yöntemlerinden daha iyi sonuçlar verir.

Şimdi değişik yaklaşım fonksiyonları kullanarak, $f(x)$ fonksiyonumuzun integral değerini hesaplamaya çalışalım.

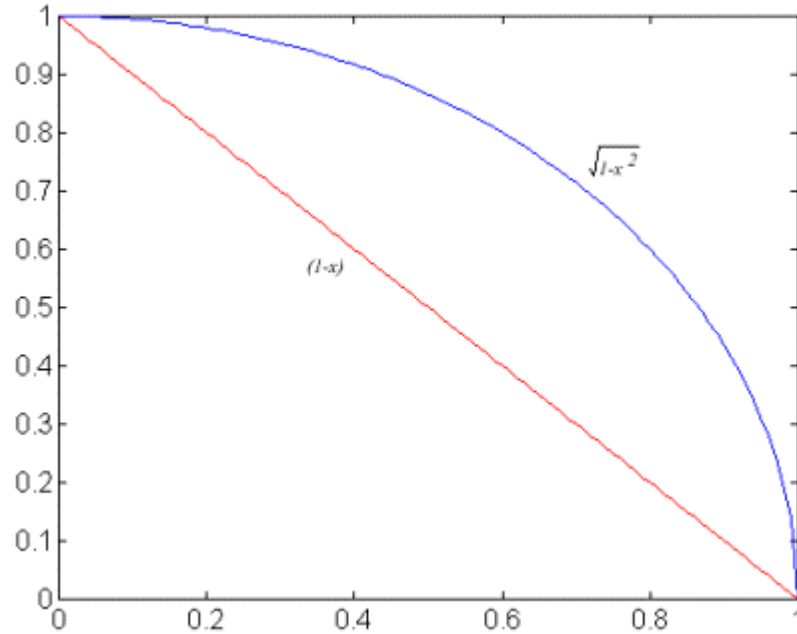
4.1.4.1 Lineer yaklaşım fonksiyonu ile

İlk olarak, lineer bir yaklaşım fonksiyonu olan,

$$h(x) = 1 - x \quad (4.8)$$

fonksiyonunu kullanalım.

Şekilden de görülebileceği gibi, yaklaşım fonksiyonumuz integrali aranan fonksiyonda oldukça farklıdır. Bu farklılık, sonuçta bulunacak integral değerine ve oluşacak hataya da etkiyecektir.



Şekil 4.9 $\sqrt{1-x^2}$ fonksiyonu ve $(1-x)$ yaklaşım fonksiyonu

Bu $(1-x)$ yaklaşım fonksiyonu kullanarak, integral almak istediğimiz bölgede, yaklaşım fonksiyonumuza benzer bir olasılık yoğunluk fonksiyonu oluşturalım.

$$p(x) = \frac{h(x)}{\int_0^1 h(x) dx} = \frac{h(x)}{I_h} = \frac{1-x}{\int_0^1 (1-x) dx} = \frac{1-x}{\left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1} = \frac{1-x}{\frac{1}{2}} = 2(1-x) \quad (4.9)$$

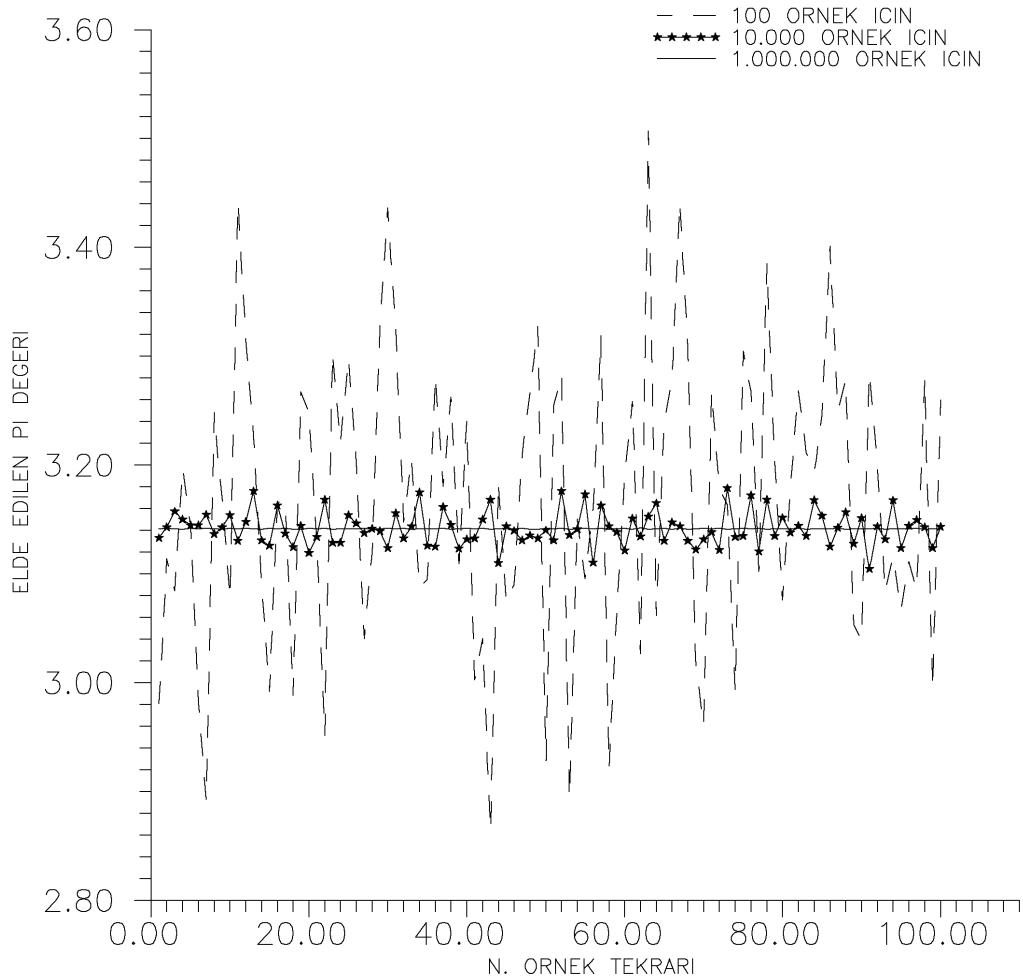
Bu olasılık yoğunluk fonksiyonunu kullanarak, integral değerimizi bulmak için rasgele sayı üretelimizde kullanacağımız, olasılık dağılım fonksiyonunu elde edelim,

$$\xi = F(x) = \int_0^x p(x)dx = \int_0^x 2(1-x)dx = 2x - x^2 \quad (4.10)$$

Bu, $F(x)$ olasılık dağılım fonksiyonunun tersini alırsak,

$$x = 1 - \sqrt{1 - \xi} \quad (4.11)$$

denklemini elde ederiz. Bu denklem dönüşümü sayesinde, rasgele sayı üretici ile program sayesinde $(0, 1)$ arasında ürettiğimiz düzgün dağılımlı sayılardan, $f(x)$ fonksiyonumuzun integralini almamızı daha kolaylaştıracak, uygun bir olasılık yoğunluğuna sahip yeni bir sayı grubu elde edebiliriz.



Şekil 4.10 Önem örnekleme yöntemi ve $(1-x)$ yardımcı fonksiyonu ile elde edilen sonuçlar

Bu yaklaşım fonksiyonu ile Önem örnekleme ile elde edilen π değerleri şekilde görülmektedir.

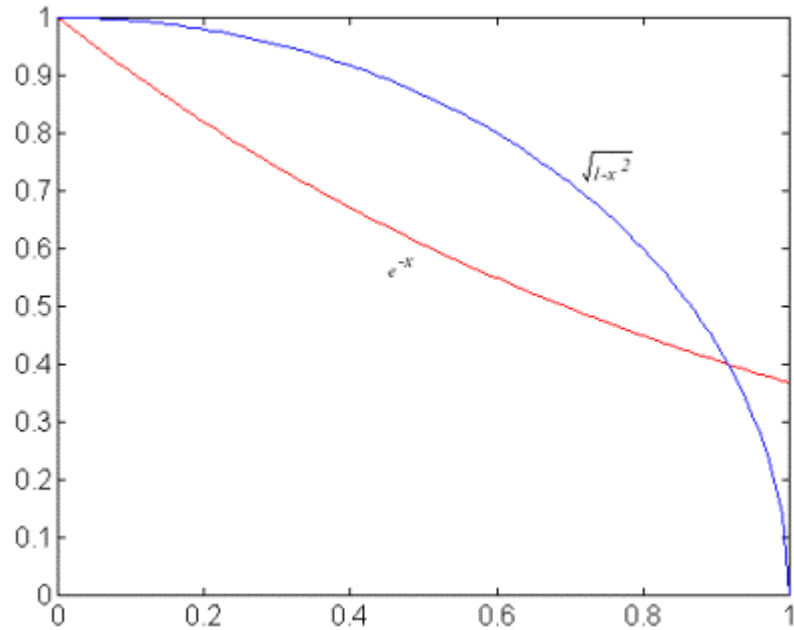
Seçilen yardımcı fonksiyonun ve bu fonksiyondan elde edilen olasılık yoğunluk fonksiyonumuzun, $f(x)$ fonksiyonumuza çok uygun olmamasından dolayı iyi sonuçlar elde edilememiştir.

Tablo 4.4 Önem örnekleme yöntemi ve $(1-x)$ yardımcı fonksiyonu ile elde edilen sonuçlar

1 Gruptaki Örnek Sayısı	1 Grup için π	π 'den Sapma%	100 grup için π	π 'den Sapma%
10	3.06208181	-2.53091145	3.05633211	-2.71393013
20	2.92867303	-6.77744484	3.08802176	-1.70521736
50	3.17870522	1.18132675	3.11688876	-0.78635204
100	3.00752306	-4.26757050	3.12095523	-0.65691239
500	3.22366333	2.61238790	3.14684200	0.16708919
1 000	3.07559204	-2.10086751	3.14377379	0.06942507
5 000	3.13621354	-0.17122525	3.14124751	-0.01098901
10 000	3.13674331	-0.15436228	3.14153194	-0.00193522
100 000	3.14064121	-0.03028809	3.14151454	-0.00248922
1 000 000	3.14174390	0.00481148	3.14150143	-0.00290662
10 000 000	3.14151955	-0.00232985	3.14150310	-0.00285350

Bu uyumsuzluk elde edilen sonuçların, aranılan değerden oldukça uzak çıkmasına neden olmuştur. Bir nevi, yöntemin bütün avantajlarını ortadan kaldırmış, ve hatta bu avantajları dezavantaj haline dönüştürmüştür.

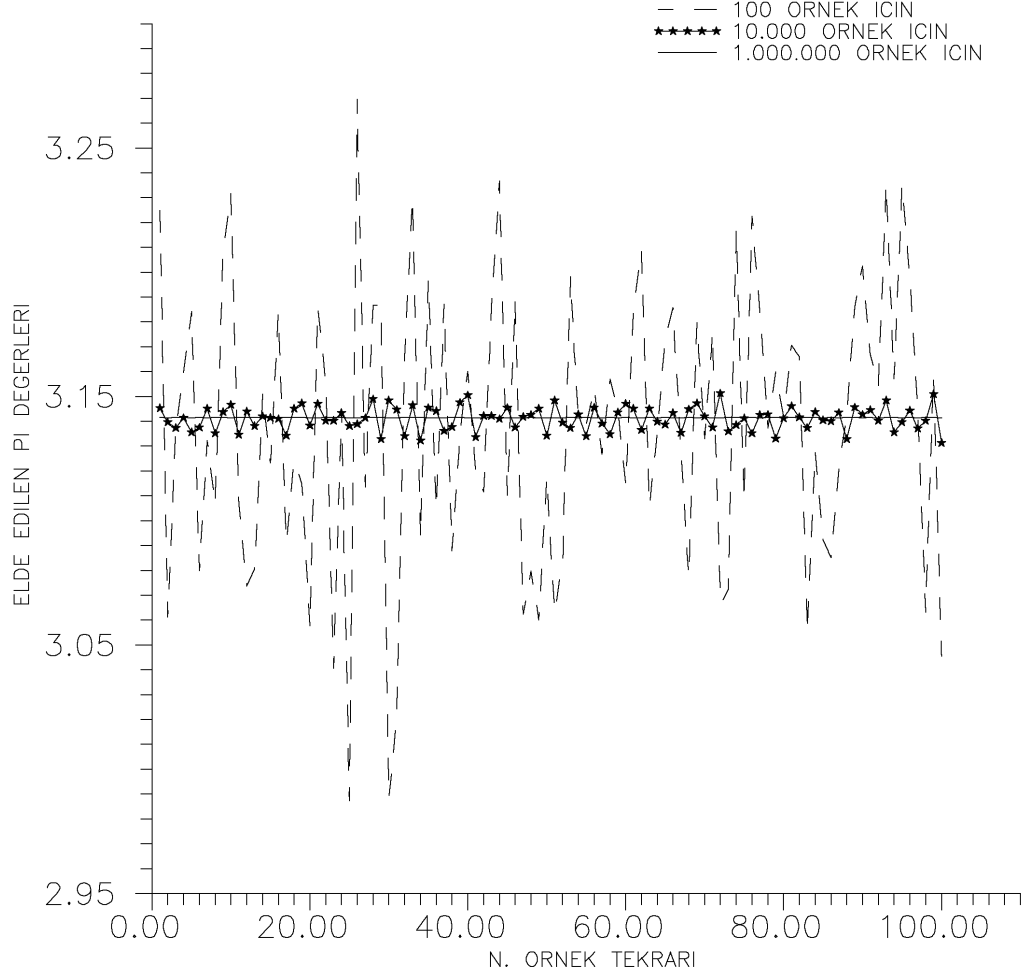
4.1.4.2 Üstel yaklaşım fonksiyonu ile



Şekil 4.11 $\sqrt{1-x^2}$ fonksiyonu ve e^{-x} yaklaşım fonksiyonu

İkinci olarak, fonksiyonumuza daha benzer bir olasılık yoğunluk fonksiyonu ele alalım,

$$h(x) = e^{-x} \quad (4.12)$$



Şekil 4.12 Önem örnekleme yöntemi ve e^{-x} yardımcı fonksiyonu ile elde edilen sonuçlar

Bu yaklaşım fonksiyonumuzun olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$p(x) = \frac{e^{-x}}{\int_0^1 e^{-x} dx} = \frac{e^{-x}}{-e^{-x} \Big|_0^1} = \frac{e^{-x}}{-e^{-1} - (-e^0)} = \frac{e^{-x}}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{e^{-x+1}}{e-1} \quad (4.13)$$

'dir ve olasılık dağılım fonksiyonu ise,

$$\xi = F(x) = \int_0^x \frac{e^{-x}e}{e-1} dx = \frac{e}{e-1} \left(-e^{-x} \Big|_0^x \right) = \frac{e}{e-1} (1 - e^{-x}) \quad (4.14)$$

ve bu fonksiyonumuzun ters fonksiyonu ise,

$$x = -\ln \left(1 - \frac{e-1}{e} \xi \right) \quad (4.15)$$

'dir.

Görüldüğü gibi, lineer yaklaşım fonksiyonuyla yapılan işlemden daha verimli bir sonuç elde edilmiştir[EKLER].

Tablo 4.5 Önem örnekleme yöntemi ve e^{-x} yardımcı fonksiyonu ile elde edilen sonuçlar

1 Gruptaki Örnek Sayısı	1 Grup için π	π 'den Sapma%	100 grup için π	π 'den Sapma%
10	3.30075264	5.06621695	3.16542506	0.75860631
20	3.08088636	-1.93234396	3.14021087	-0.04398641
50	3.21414971	2.30956006	3.14401650	0.07715077
100	3.11437988	-0.86621213	3.13776469	-0.12185057
500	3.16363645	0.70167291	3.14084148	-0.02391325
1 000	3.10858178	-1.05077147	3.14195824	0.01163408
5 000	3.13904572	-0.08107434	3.14133048	-0.00834800
10 000	3.14711308	0.17571799	3.14115143	-0.01404742
100 000	3.14089561	-0.02219052	3.14136410	-0.00727794
1 000 000	3.14149642	-0.00306599	3.14147067	-0.00388561
10 000 000	3.22401690	2.62364244	3.22401428	2.62355900

Aradığımız fonksiyonun şeklinin, yakınsamakta kullandığımız üstel fonksiyonun şekline az da olsa benzerliği bile erişimimizi olumlu yönde etkilemiştir.

4.1.4.3 $(1-x^3)$ Yaklaşım fonksiyonu ile

Şimdi kontrol yönteminde kullandığımız, fonksiyonumuza oldukça benzer olan $h(x) = (1-x^3)$ fonksiyonu, Önem örnekleme yönteminde ele alalım.

Bu fonksiyonun $(0, 1)$ aralığında integrali,

$$I_h = \int_0^1 (1-x^3) dx = \left(x - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \left(1 - \frac{1}{4} \right) - \left(0 - \frac{0}{4} \right) = \frac{3}{4} \quad (4.16)$$

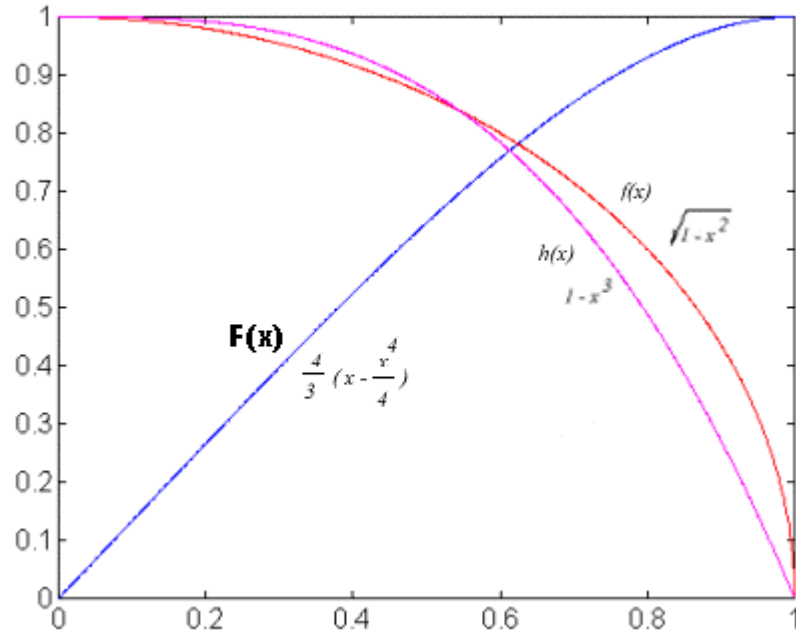
dir. Bu fonksiyonumuza ilişkin olan olasılık yoğunluk fonksiyonumuz ise,

$$p(x) = \frac{h(x)}{I_h} = \frac{4}{3}(1-x^3) \quad (4.17)$$

'tür. Buradan da, olasılık dağılım fonksiyonunu elde edersek,

$$\xi = F(x) = \int_0^x p(x) dx = \int_0^x \frac{4}{3}(1-x^3) dx = \frac{4}{3} \left(x - \frac{x^4}{4} \right) \quad (4.18)$$

denklemini elde ederiz.

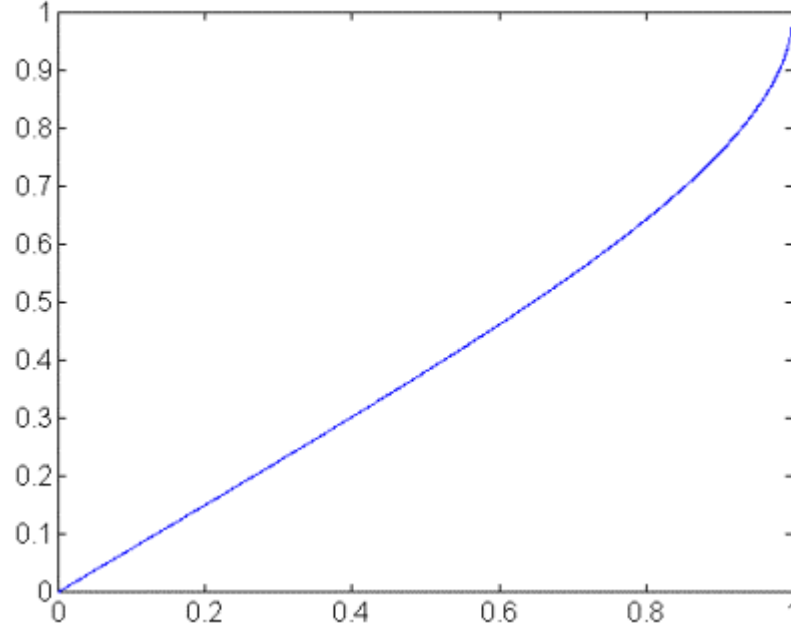


Şekil 4.13 İntegralini almak istediğimiz $\sqrt{1-x^2}$ fonksiyonu, $(1-x^3)$ yardımcı fonksiyonu ve bu yardımcı fonksiyondan elde edilen olasılık dağılım fonksiyonu

Fakat bu denklemin analitik olarak bir ters fonksiyonu yoktur. Bu nedenle, ters fonksiyonun elde edilmesi için, tablo yönteminden yararlanılmıştır.

Tablo yönteminde, x -ekseni $(0,1)$ aralığında parçalara bölünür ve her x değeri için olasılık yoğunluk fonksiyonun integrali alınır, yani seçilen her x değeri (4.18)

denkleminde yerine konularak, belirli x 'ler için $F(x)$ değerleri hesaplanır. Böylelikle, verilen olasılık dağılım fonksiyonu $F(x)$ 'in, raslantısal değişken x , ters yöntemin $u=F(x)$ için çözümü olan x ve u değerleri bir tablo şeklinde oluşturulur.



Şekil 4.14 Olasılık dağılım fonksiyonu $F(x) = \frac{4}{3} \left(x - \frac{x^4}{4} \right)$ 'in ters fonksiyonun grafiği

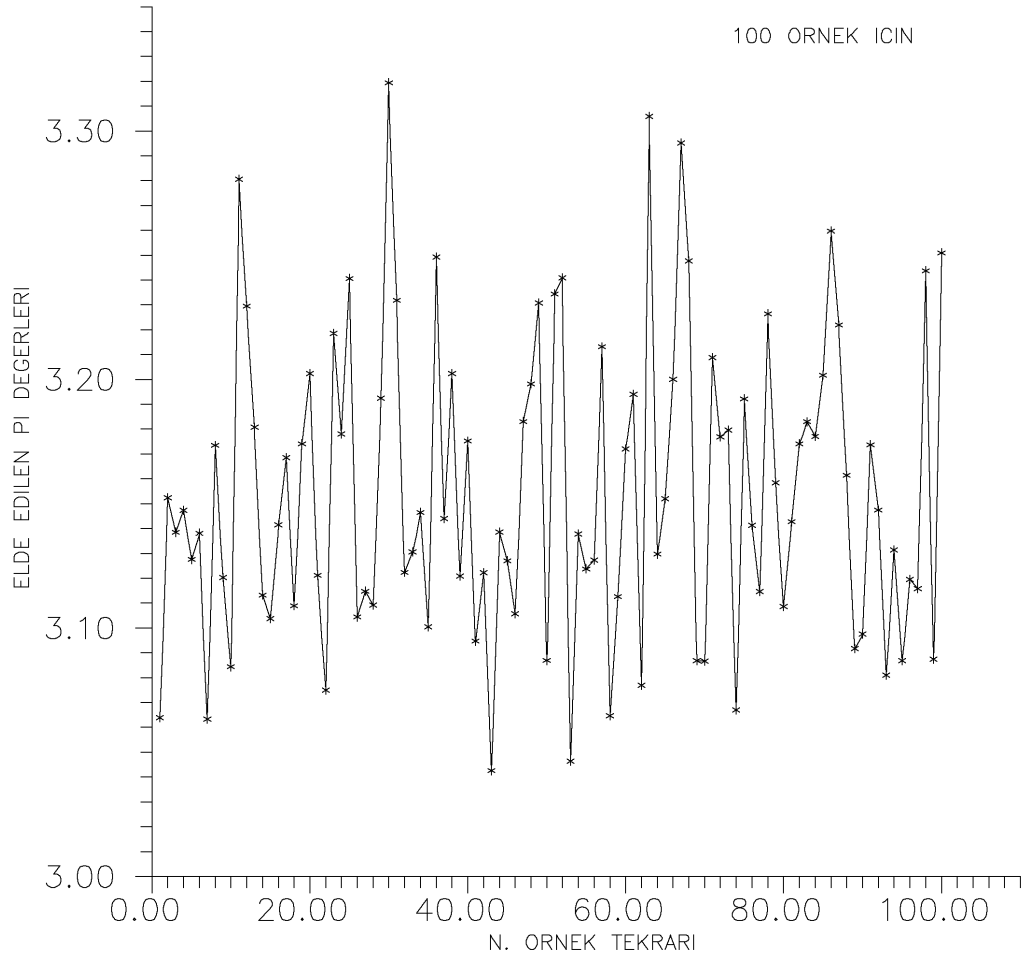
$u=F(x)$ 'den $x=F^{-1}(u)$ yazılabileceğinden, oluşturulan tablodan bu kez de seçilen u değerleri içine karşı düşen x değerleri okutulabilir.

Olasılık yoğunluk fonksiyonu $p(x)$ olan, rasgele x değerleri üretmek için, $(0, 1)$ arasında düzgün dağılan u 'ların değerleri $(=F(x))$ 'den yola çıkarak, bu değerlere karşı düşen x 'ler bulunur ve böylelikle istenilen dağılım oluşturulur.

Yardımcı fonksiyon yardımıyla elde edilen olasılık yoğunluğuna uygun olan bu x sayıları,

$$I = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(x_i)}{p(x_i)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\sqrt{1-x_i^2}}{4(1-x_i^3)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{3\sqrt{1-x_i^2}}{4(1-x_i^3)} \quad (4.19)$$

denkleminde yerine konularak integral değeri hesaplanır.



Şekil 4.15 Önem örnekleme yöntemi ve $(1 - x^3)$ yardımcı fonksiyonu ile elde edilen sonuçlar

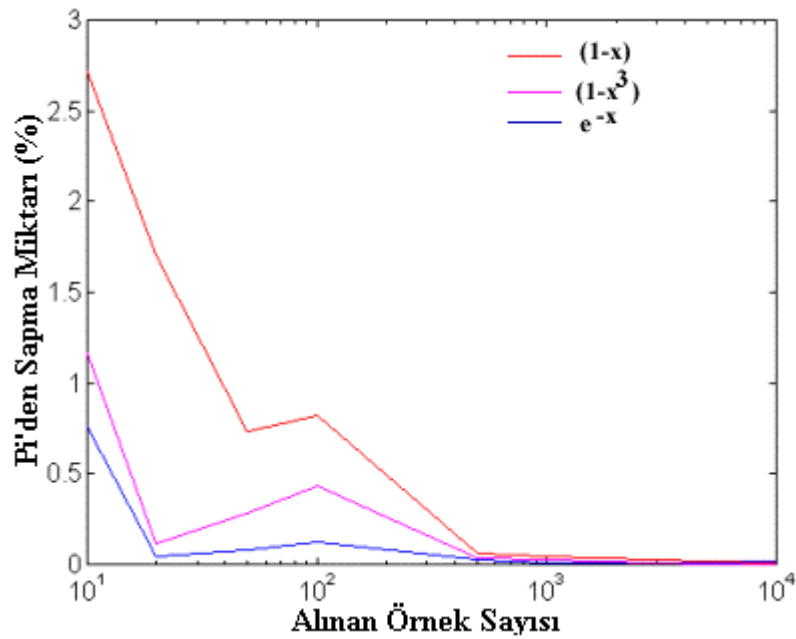
Bu hesaplamada elde edilen sonuç, rasgelelik seçilen noktalarla işlem yapıldığından, kontrol değişeni kadar verimli değildir. Ama yine de reddetme ve ortalama yönteminden daha hızlı yaklaşım yapan bir yöntemdir.

Tablo 4.6 Önem örnekleme yöntemi ve $(1 - x^3)$ yardımcı fonksiyonu ile elde edilen sonuçlar

1 Gruptaki Örnek Sayısı	1 Grup için π	π 'den Sapma%	100 grup için π	π 'den Sapma%
10	3.05503726	-2.75514650	3.10493135	-1.16696811
20	3.05573130	-2.73305464	3.13786983	-0.11850378
50	3.05963111	-2.60891962	3.13272285	-0.28233725
100	3.17201304	0.96830833	3.15510702	0.43017289
500	3.13199902	-0.30537775	3.14054418	-0.03337685
1 000	3.18919563	1.51524711	3.14083982	-0.02396637
5 000	3.15349126	0.37874156	3.14145899	-0.00425748

4.1.4.4 Fonksiyon seçimlerinin karşılaştırılması

Önem örnekleme yönteminde seçilecek fonksiyonun önemi, Şekil 4.16'dan da görülebileceği gibi oldukça fazladır. Seçilen fonksiyon ne kadar uygunsa, istenen değere erişim hızı o kadar yüksek olacaktır. $(1-x)$ lineer fonksiyonu ile yapılan yaklaşımda gerçek değerden sapmalar oldukça fazla iken, fonksiyonu daha iyi takip eden $(1-x^3)$ ve e^{-x} fonksiyonlarının sapma miktarları düşük ve erişim hızları oldukça iyidir.



Şekil 4.16 Önem örnekleme yönteminde çeşitli fonksiyonlar için sapma miktarları

$(1-x^3)$ fonksiyonu $\sqrt{1-x^2}$ fonksiyonuna daha uyumlu bir fonksiyon olmasına rağmen e^{-x} fonksiyonundan daha kötü sonuçlar vermiştir. Bunun nedeni $(1-x^3)$ fonksiyonun ters fonksiyonunun bulunamayıp, tablo yöntemi ile ters fonksiyon değerlerine erişilmeye çalışılmasındandır. Kullanılan tabloda da, erişimi hızlandırmak amacı ile, adım sayısının büyük tutulması nedeniyle, bu fonksiyonunun, fonksiyonumuza uyumluluğunun etkileri kaybedilmiştir. Buradan da anlaşılacağı gibi, ters fonksiyonu bulan fonksiyonlarla işlem yapmak oldukça avantajlı ve de verimlidir. Ters fonksiyonu bulunamayan fonksiyonların kullanımında ise, tablodan okumada kaybedilen vakit nedeniyle ve de oluşturulan tablonun çözünürlüğünün iyi yapılamamasından dolayı olumsuzlukları oldukça fazladır.

Önem örnekleme yönteminin dezavantajı, olasılık yoğunluk dolayısıyla yaklaşım fonksiyonunun belirlenmesinin zorluğudur. Ayrıca, yöntemin uygulanmasında, olasılık dağılım fonksiyonunun, ters fonksiyonunun bulunması gerektiğinden, uygun bir fonksiyon bulunsa dahi ters fonksiyonu elde edilemediğinde Şekil 4.16'da görülebileceği gibi yöntem kullanışlılığını kaybedebilir. Ters fonksiyonun bulunamadığı durumlarda kullanılan tablo yöntemi de oldukça vakit ve de işlem alan bir yol olduğundan maliyeti oldukça yüksek olabilir.

Hatalı olasılık yoğunluk fonksiyonunun seçilmesi durumunda ise, fonksiyonun karakteristiği tam olarak takip edilemediğinden dolayı, integral değerine yanlış bir şekilde yakınsanmaya çalışılacaktır ve istenilen sonuçlar elde edilemeyecektir.

Bu yöntem, bir verinin olasılık yoğunluk fonksiyonunun, yaklaşık olarak bilinmesi durumunda oldukça avantajlıdır. Haberleşme verilerinin bir çoğu hakkında elde edilen bilgiler, daha çok olasılıksal temelli olduğundan, bu tür verilerin işlenmesinde oldukça büyük kolaylıklar sağlar.

4.2 Simpson Yöntemi

Analitik integral alma yöntemlerinden en önemlilerinden biri olan Simpson yöntemi ile $\sqrt{1-x^2}$ integralini çözmek istediğimizde aşağıdaki sonuçları elde ederiz. Simpson yönteminde integral alma işlemi fonksiyonun eşit aralıklara sahip adımlara bölünerek yapılmaktadır[EKLER].

Tablo 4.7 Simpson yöntemi ile elde edilen sonuçlar

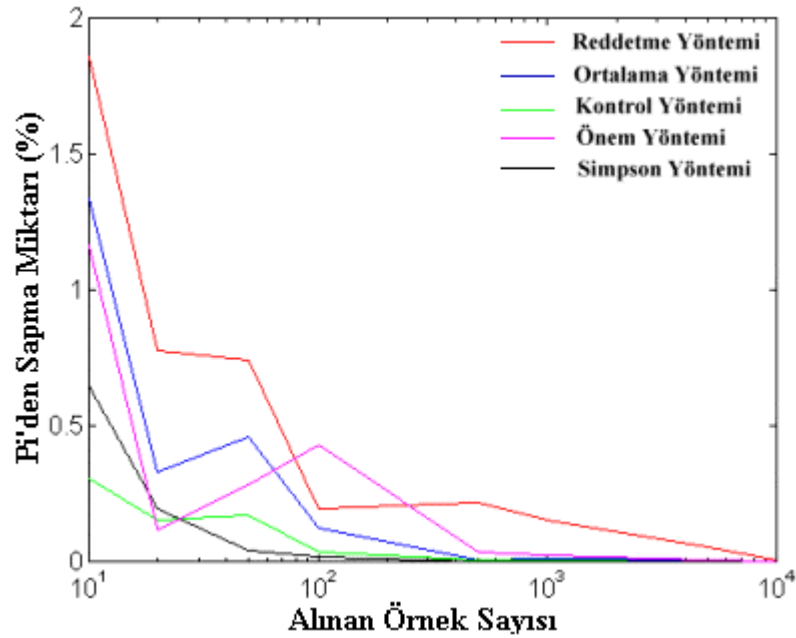
Örnek Sayısı	Bulunan π	π 'den Sapma%
9	3.12118912	-0.64946747
19	3.13556457	-0.19188277
49	3.14021039	-0.04400159
99	3.14111900	-0.01507953
499	3.14155126	-0.00132050
999	3.14157820	-0.00046293
4 999	3.14159131	-0.00004553
9 999	3.14159226	-0.00001517
99 999	3.14159274	0.00000000

Belirli adımlarda fonksiyonun aldığı değerler sabit olduğundan işlem ne kadar tekrar edilirse edilsin, adım sayısı sabit olduğu sürece aynı değerlere erişilecektir. İntegral değerlerinin hesaplamasında basit bir Simpson döngüsü kullanılmıştır. Bu yöntemde rasgele sayı üretme işlemi olmadığından ve de 1-boyutlu işlem yapıldığından oldukça hızlı bir şekilde sonuçlara erişilmiştir.

Yukarıdaki tablodan görüldüğü gibi elde edilen değerler, π değerine oldukça yakındır. Adım sayısı arttırıldıkça, oldukça lineer bir davranışla hata miktarı azalıp, aranan π değerine ilgilenilen tam değeriyle yaklaşmıştır.

4.3 Karşılaştırma

Bu tezde ele aldığımız Simpson ve Monte Carlo yöntemlerinin verimliliğini 1-boyutlu integral denkelmeinin çözümü karşılaştırdığımızda, Simpson yönteminde elde edilen değerlerin π 'ye yakınsamasında bir doğrusallık varken, Monte Carlo yöntemleri ile elde edilen sonuçlarda rasgele sayılar ve olasılıksal dağılımlar kullanıldığından bir düzensizlik vardır.



Şekil 4.17 Yöntemlerin Sapmalarının Karşılaştırılması

Şekil 4.17'de de görülebileceği gibi, reddetme yöntemi genel olarak en fazla hatanın meydana geldiği yöntemdir. Bu da daha öncede bahsedildiği gibi, tamamen seçilen alan ve rasgele sayı üreticinin düzgün dağılıp dağılmaması ile ilgilidir.

Ortalama yönteminde, rasgele seçilen noktalarda, doğrudan fonksiyonun analitik ifadesinden elde edilen değerler kullanıldığından, Simpson yöntemine benzer sonuçlar beklenebilirdi. Fakat, rasgele sayı üreticinin ideal bir üreteç olmayıp, düzgün dağılımlı olasılık yoğunluk fonksiyonuna uygun sayılar üretememesinden ileri gelmektedir. Oluşan bu hata ve sapmalardan dolayı çok verimli bir sonuç elde edilemiştir. Ayrıca, seçilen düzgün dağılımlı olasılık yoğunluk fonksiyonu karakteristikli rasgele sayı üretici fonksiyonun tam olarak değişimini takip edebilecek nitelikte olmadığından aranılan integral değerine iyi bir şekilde yakınsanamamıştır.

Önem örnekleme yönteminde seçilen yardımcı fonksiyonla ilgili olarak, sonuca yakınsama hızımızda değişmektedir. İşlemler 1-boyutta yapıldığından yardımcı fonksiyonların ve seçilen olasılık dağılım fonksiyonlarının verimliliği tam olarak görülememektedir.

Kontrol değişkeni yönteminde elde edilen sonuçlar, seçilen yardımcı fonksiyonun aranılan integral fonksiyonuna yakın olması nedeniyle, oldukça iyi sonuçlar vermiştir.

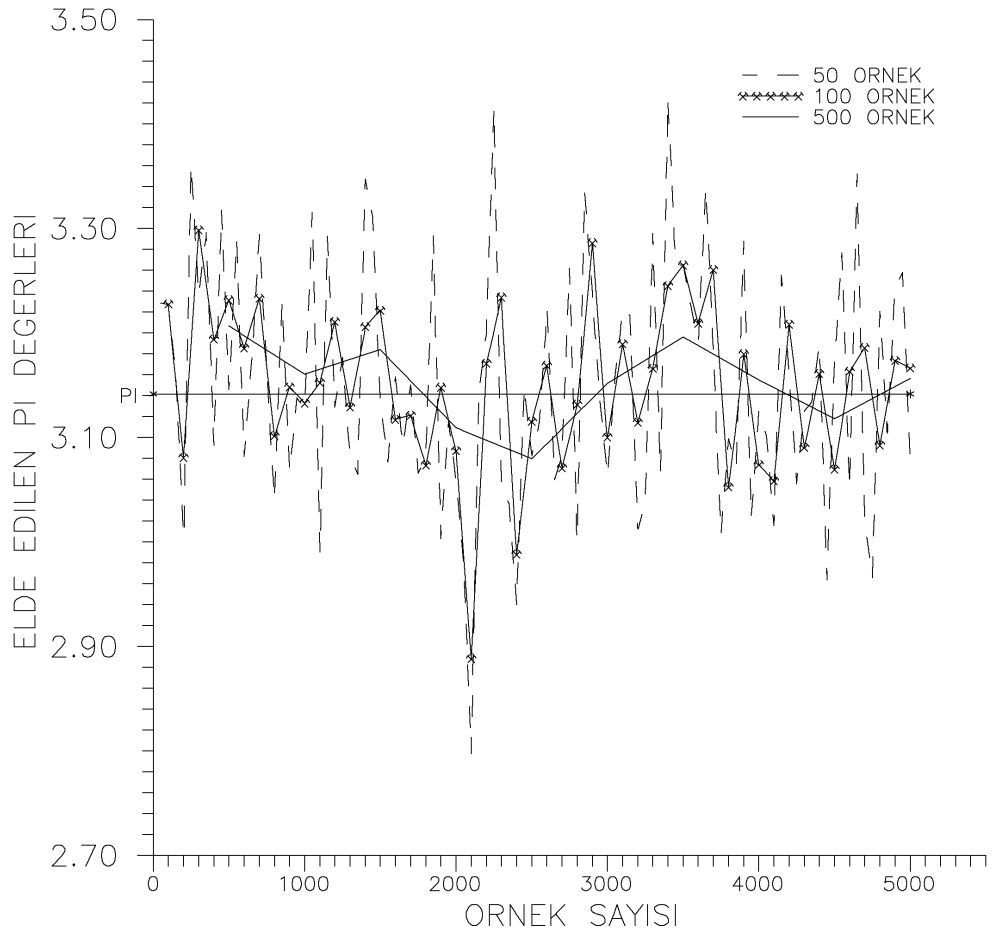
Simpson yönteminde ise, π değerine adım arttıkça doğrusal bir yakınsama meydana gelmiştir.

Bu elde edilen sonuçlar, beklenen sonuçlardır. Analitik yöntemlerden Simpson yönteminin 1-boyutlu integraller için hata yakınsaması, Monte Carlo yöntemininkinden oldukça iyidir. Buna ek olarak Monte Carlo yönteminde kullanılan rasgele üreteçlerin idealsizliği ve tam olarak ideal olasılık yoğunluk ve yardımcı fonksiyonlar seçilemediğinden beklenen dışında da sapmalar meydana gelmiştir.

4.4 Önceden Üretilmiş Örnek Grubunun Değişik Büyüklüklerde Örnek Grubuna Bölünerek İncelenmesi

Bu incelememizde ise, önceden üretilmiş örneklerin değişik büyüklükteki gruplar halinde işlenip, istenen gerçek değer etrafında ne kadar saçıldığı incelenmiştir. İşleme sokulan toplam örnek sayısı sabit olduğundan, her farklı büyüklükteki grubun sonuç olarak ulaştığı π değeri aynıdır.

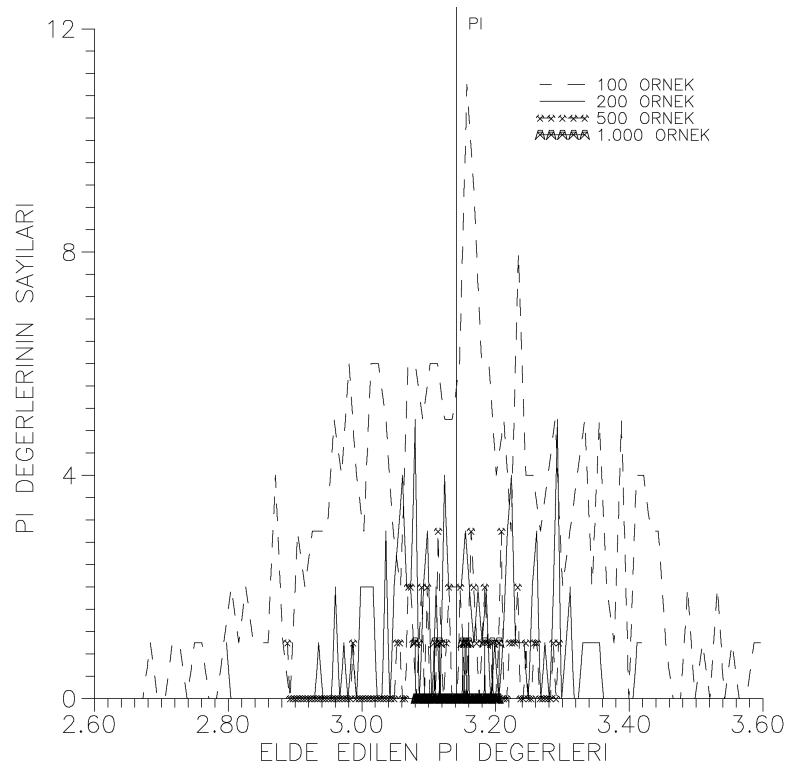
Hesaplamalarımızda düzgün olasılık yoğunluğu ile üretilmiş sabit sayıdaki örnekler kullanılmaktadır ve bu örneklerden farklı sayılarda alınarak gruplar oluşturulup, işleme sokulmuştur. Bu gruptaki rasgele örnekler, bu örnek değerlerinde fonksiyonun aldığı ortalama değerlerinin hesaplanması ile yani 4.1.2 bölümünde örnek olarak incelenen Monte Carlo'nun ortalama yöntemi kullanılarak integral hesabında kullanılmışlardır.



Şekil 4.18 Toplam 5000 örneğin; 50, 100 ve 500'lü gruplar halinde işleme sokularak her grup için elde edilen π değerlerinin, gerçek π değeri etrafında saçılımı

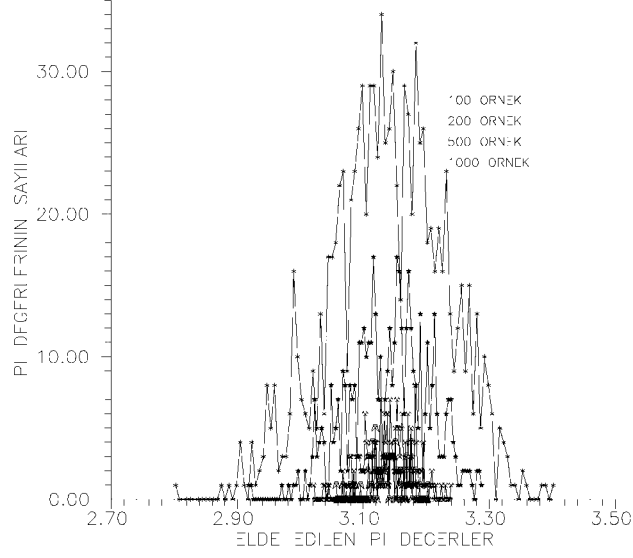
Şekil 4.18'de önceden üretilmiş 5000 örnek, 50, 100, 200 ve 500'lü gruplar halinde işleme sokulmuştur. Buradan da görülebileceği gibi, bir seferde işleme sokulan eleman sayısı az olan grupların, her grup değeri için elde edilen π değeri oldukça fazla bir saçılıma uğramıştır. Sonuç olarak toplamda işleme sokulan örnek sayısı 5000 ile sabit olduğundan dolayı, her grup için ulaşılan π değeri aynıdır.

Toplam 10.000 örnek sayısı için, her grup için elde edilen π sayılarının dağılımını incelemek istediğimizde, bu dağılım Şekil 4.19'den de görülebileceği gibi Gauss dağılımı özelliği göstermektedir.



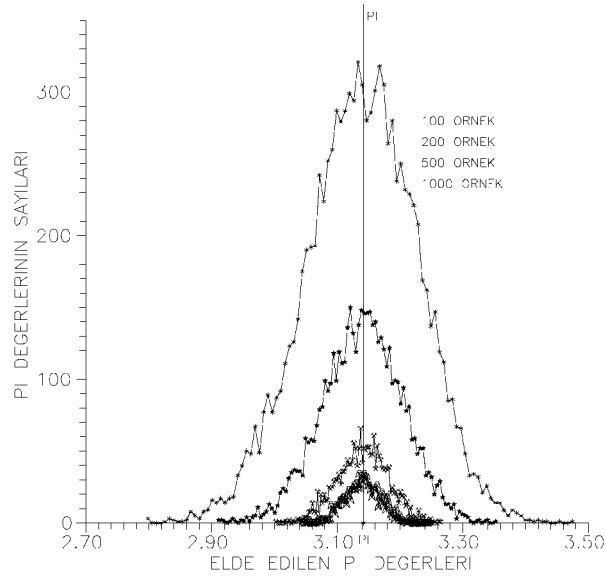
Şekil 4.19 Üretilen 10.000 örneğin, 100, 200, 500 ve 1000'li gruplar halinde incelenmesi sonucu elde edilen π değerlerinin sayısal dağılımı

Şekilde farklı büyüklükteki grupların dağılımı için keskin bir sınır net olarak görülememektedir. Ele aldığımız örnek sayısını arttırdığımızda ise, Şekil 4.20'dan ve Şekil 4.21'den görülebileceği gibi, her örnek grubu için elde ettiğimiz dağılım ayrı ayrı net bir şekilde görülebilmektedir. Eleman sayısını yüksek tuttuğumuz grupların, beklendiği gibi, gerçek π değeri etrafındaki saçılımı oldukça küçüktür. Örnek sayısını küçük tuttuğumuzda ise, saçılım yayının oldukça büyük olduğu açıkça görülebilmektedir.



Şekil 4.20 Üretilen 100.000 örneğin 100, 200, 500 ve 1000'li gruplar halinde incelenmesi sonucu elde edilen π değerlerinin sayısal dağılımı

100.000 örnek için yapılan incelemede elde edilen π değerlerinin, gerçek değer etrafındaki saçılımını gauss dağılımına benzerliği oldukça iyi bir şekilde görülmektedir. Ele alınan örnek sayısı arttıkça elde edilen π 'ye yaklaşılarak oldukça küçük saçılımlar göstermektedirler.



Şekil 4.21 Üretilen 1.000.000 örneğin; 100, 200, 500 ve 1000'li gruplar halinde incelenmesi sonucu elde edilen π değerlerinin sayısal dağılımı

Şekil 4.21'dan da görüldüğü üzere, 1.000.000 örnek için yapılan incelemede, her farklı büyüklükteki grubun dağılımının grafiği oldukça ayırdır ve dağılım parametreleri şekilden de elde edilebilecek kadar açıktır. Seçilen tahmini değerler

normal dağılmıştır ve oluşturulan gruptaki nokta sayısı ne kadar çoksa, elde edilen sonuçların standart sapması da o kadar küçülecektir. Şekil 4.21'da, 1000 örnek için meydana gelen standart sapma oldukça küçüktür ve 100, 200 ve 500 örnekli grupların standart sapmalarından rahatlıkla ayırtedilebilir bir haldedir.

4.5 Monte Carlo Yönteminin Çok-Boyutlu Bir Probleme Uygulanması: Hiper Kürenin Hacmi

Monte Carlo Yönteminin boyuttan bağımsız bir yöntem olduğunu önceki bölümlerimizde belirtmiştik. Şimdi Monte Carlo Yöntemi'nin bu özelliğini anlayabilmek için, yöntemi d -boyutlu bir hiper kürenin hacminin bulunmasına uygulayalım. d -boyutlu uzayda bir kürenin hacmi aşağıdaki ifade ile verilir[24];

$$I = \iiint_{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2 \leq r^2} dx_1 dx_2 \dots dx_d = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)} r^d \quad (4.20)$$

Gamma fonksiyonları arasındaki,

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad (4.21)$$

$$2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma(z + \frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \Gamma(2z) \quad (4.22)$$

indirgeme bağıntılarının[25] kullanılmasıyla her d -boyutu için kürenin hacmi kolayca belirlenebilir.

Böylelikle Gamma fonksiyonları yardımıyla, bulunması oldukça zor olan, çok-katlı kürelerin hacminin değerine çok kolaylıkla erişebiliriz.

Bu alt bölümde d -boyutlu hiper kürenin hacmi *Denklem 4.20* bağıntısının sağındaki integral ifadesinin Monte Carlo yöntemi ile hesaplar ve elde edilecek sonuçlar, küre hacminin gerçek değerleri de karşılaştırılacaktır.

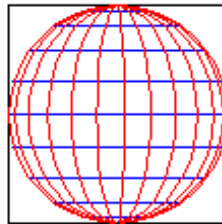
Bu eşitliklere göre, *çok-katlı* kürelerin hacim eşitlikleri,

Tablo 4. 8 Hiper-kürenin boyut sayısına göre hacim değerleri

Boyut Sayısı	Hacim	$r=0.5$ için hacim
2	πr^2	0.785398185
3	$\frac{4}{3}\pi r^3$	0.52359879
4	$\frac{\pi^2}{2}r^4$	0.308425158
5	$\frac{64}{120}\pi^2 r^5$	0.164493412
6	$\frac{\pi^3}{6}r^6$	0.0807455182
7	$\frac{16}{105}\pi^3 r^7$	0.0369122364
8	$\frac{\pi^4}{24}r^8$	0.0158543456
9	$\frac{32}{945}\pi^4 r^9$	0.00644240109
10	$\frac{\pi^5}{120}r^{10}$	0.00249039498
11	$\frac{2048}{332640}\pi^5 r^{11}$	0.000919972779

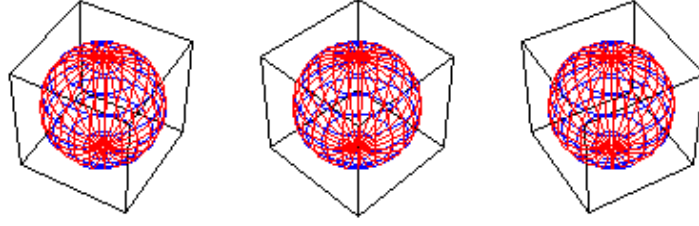
gibidir.

$d=2$ için, Şekil 4.22'deki gibi normal bir daire şeklinde olan hiper küremiz,



Şekil 4.22 2-boyutlu hiper-küre

$d=3$ için de Şekil 4.23'deki gibi bir küreye dönüşecektir.



Şekil 4.23 Değişik açılarda 3-boyutlu hiper-kürenin görünüşü

Küremizin denklemsel bir ifadesi belirli ve tanımlı olduğu alan belirli olduğundan Monte Carlo reddetme yöntemini uygulamak için elverişli olacaktır. Ayrıca reddetme yönteminin kolay uygulanabilir ve hızlı cevap verebilen bir yöntem olması nedeniyle problemimize bu yöntemi uygulayalım.

$r=0.5$ 'yi olarak belirleyelim. Problemimiz bilgisayar algoritmamız şu şekildedir[EKLER],

- Öncelikle hiper küremizin, integralinin alınması istenen bölgedeki sınırları belirlenmelidir. $r=0.5$ olarak belirlendiğinden, ayrıt uzunluğu 1 olan ve küremizi içine alan birim küp ile sınırlarımızı oluşturalım. Reddetme yönteminde, küremizin merkezini orjinde kabul edersek, fonksiyonu da içine alan bu sınırlandırılmış bölge, integralin alınmak istenildiği $(x_{min}, x_{max}) = (-0.5, 0.5)$ aralığı olacaktır.
- Taranacak bölge bu şekilde belirlendikten sonra bölge, $(-x_{min}, x_{max}) = (-0.5, 0.5)$ aralığında rasgele üretilen her boyut için bir tane x_i değeri seçilir.
- $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2$ değeri hesaplanır ve $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2 \leq r^2$ için sayaç değerimiz 1 arttırılır.
- *Sayaç / Toplam N* değerimiz bize integrali bulunmak istenen alan ile toplam alan arasındaki oranı verecektir.

Değişik sayıda örnekler için denediğimiz hacim hesabında elde edilen bazı sonuçları tablo halinde ele alalım.

Tablo 4.9'de görülebileceği gibi, 5000 örnek için gerçek integral değerinden sapma miktarları mutlak olarak yaklaşık aynı seviyelerde kalmıştır. Bu sonuçlar, Monte Carlo yönteminin boyuttan bağımsız olmasının temel bir sonucudur. Örnek sayısının

sabit olması nedeniyle integral değerleri değişmiş olsa bile genel olarak meydana gelen hatada çok büyük bir değişiklik olmamıştır.

Tablo 4. 9 5000 örnek alınmak üzere Hiper-kürenin değişik boyutlar için hacim değerleri

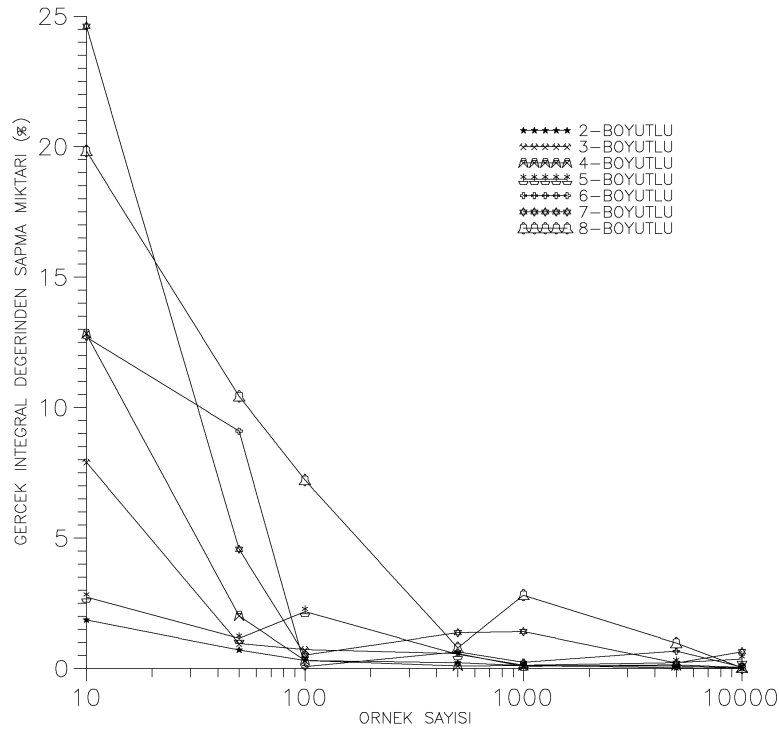
Boyut Sayısı	Elde Edilen Hacim	Sapma Miktarı (%)
2	0.78512388	-0.034925
3	0.52288389	-0.136535
4	0.30810004	-0.105411
5	0.16411999	-0.227014
6	0.08020999	-0.663226
7	0.03698799	0.205247
8	0.01570000	-0.973515
9	0.00643799	-0.0683319
10	0.00250200	0.466027
11	0.00091799	-0.214451

Elde edilen sonuçlarda meydana gelen dalgalanmaların nedeni ise, rasgele sayı üreticinin ideal bir davranış gösterebilmesi için daha çok sayıda örnek gerekmesi dir.

Tablo 4. 10 5-boyutlu Hiper-kürenin değişik örnek değerleri için elde edilen hacim değerleri

Örnek Sayısı	Elde Edilen Hacim	Sapma Miktarı (%)
10	0.16900003	2.739695
50	0.16640000	1.159067
100	0.16090003	-2.184516
500	0.16537999	0.538973
1.000	0.16428997	-0.123680
5.000	0.16411999	-0.227014
10.000	0.16389994	-0.360786

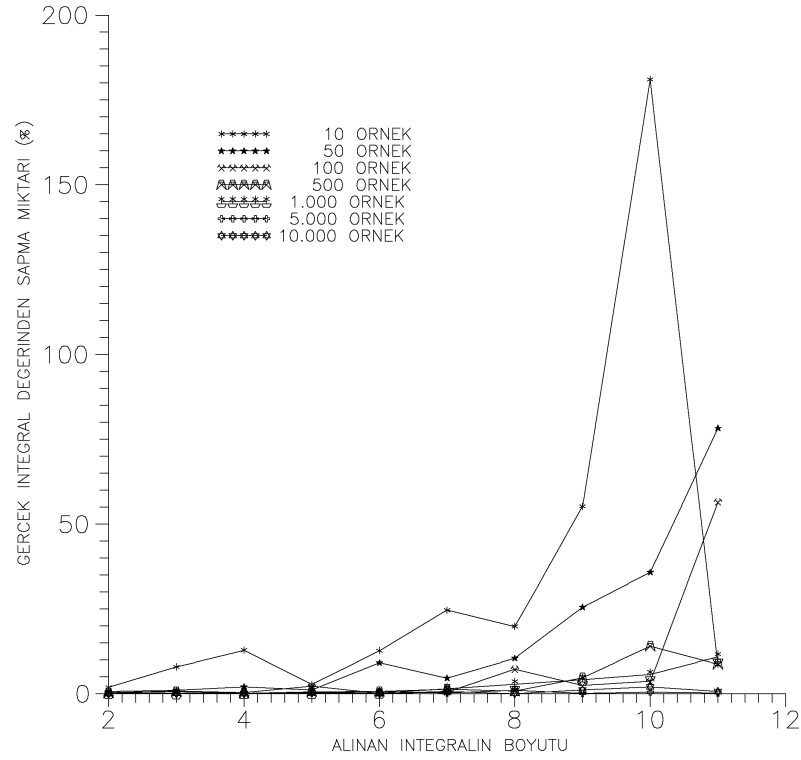
Tablo 4.10’de de bir önceki tabloda farklı olarak, 5-boyutlu bir şeklin integralinin Monte Carlo reddetme yöntemi ile değişik örnek sayıları için elde edilen sonuçları yer almaktadır. Doğal olarak, örnek sayısı arttıkça, sapma miktarında bir azalma görülmektedir. Sapmada oluşan idealsizlikler ise, yöntemin uygulanışı için yeterli sayıda örnek alınmamasından ve rasgele sayı üreticimizin ideal bir davranış gösterip düzgün (*uniform*) dağılımlı bir rasgele sayı üretici gibi davranmamasından kaynaklanmaktadır.



Şekil 4.24 Çok-boyutlu hiper kürenin reddetme yöntemi ile elde edilen integral değerinden sapma miktarının, değişik boyutlar için boyut-sayısı sabit tutularak, alınan örnek sayısına göre değişiminin verdiği sonuçlar

Şekil 4.24 ve Şekil 4.25’de boyut veya örnek sayısı sabit tutularak elde edilen sonuçlar yer almaktadır. Bu şekilleri sıra incelemek istersek, Şekil 4.24’den düşük örnek sayıları için, gerçek integral değerinden sapma miktarlarının oldukça fazla olduğunu görürüz. Örnek sayısı arttıkça da sapma miktarları, boyuttan bağımsız olarak, bir seviyenin altında kalmaktadır. Bunun nedeni de, alınan az sayıdaki örnek grupları için, üreticimizin düzgün dağılıma sahip rasgele sayılar üretememesinden kaynaklanmaktadır.

Şekil 4.25’den ise, integrali alınan fonksiyonun boyutu arttıkça, az sayıda örnek alınması durumunda, boyut arttıkça Monte Carlo reddetme yöntemi ile gerçek integral değerleri arasındaki sapma miktarlarında yüksek bir artış görülmektedir. Bu, bir önceki paragrafta anlatıldığı gibi, düşük sayıda örnek grupları için, rasgele sayı üreticimizin ideal bir sayı üretici gibi davranamamasından kaynaklanmaktadır. Bu dezavantaj da, yüksek sayıda örnek grupları alındığında nispeten ortadan kalkmıştır. Yüksek sayılı örnek grupları için meydana gelen sapma miktarı şekilden de görülebileceği gibi hep bir seviyenin altında kalmıştır.



Şekil 4.25 Çok-boyutlu hiper kürenin reddetme yöntemi ile elde edilen integral değerinden sapma miktarının, değişik örnek sayıları için, boyut-sayısına göre değişiminin verdiği sonuçlar

Bu hesaplamalardan elde edilen sonuçlardan da anlaşılabileceği üzere, Monte Carlo yöntemi boyuta bağımlı olmayan bir yöntemdir. Fakat ideal bir rasgele sayı üreticine ihtiyaç duyar. İyi sonuçlar elde edebilmek için, üreticinin ideal davrandığı miktarda örnek almak gerekmektedir.

Reddetme yönteminde integrali alınak fonksiyonun yaklaşık bir matematiksel ifadesi gerektiğinden ve integrali alınacak hacmin sınırlarının iyi belirlenmesi zorunluluğundan her problem için uygun bir yöntem değildir.

5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Monte Carlo yöntemi, kimyadan termodinamiğe ve atom fizikine kadar pek çok alanda başarı uygulanan ve oldukça iyi sonuçlar elde edilen bir yaklaşım ve tekniktir. Bu yöntem ile ilgili, çeşitli alanlarda pek çok literatür oluşmuştur.

Bu tezin yapılmasındaki amaç, elektromanyetik problemlerde boyutu arttıkça çözülmesi güçleşen ve oldukça hızlı değişen karmaşık integrallere ve integral değerinin bulunması gereken ama tam olarak deterministik bir ifadesi bulunamadığından, sadece olasılıksal olarak ifade edilebilen fonksiyonların çözümünde Monte Carlo integral alma yönteminin uygulanabilir olup olmadığının araştırılmak istenmesidir.

Öncelikle, yöntemimizi uygulayabilmemiz ve daha iyi anlayabilmemiz için olasılıksal kavramlar üzerinde durulması gerekmektedir. Bu nedenle, ortalama, varyans ve Monte Carlo yönteminin temelini oluşturan merkezi limit teoreminden bahsedilmiş ve yöntemin temelini dayandığı mantık açıklanmıştır.

Anlaşılmasının kolaylığı açısından, Monte Carlo integral alma yöntemleri, basit bir integral denklemine uygulanmış ve sonuçları yorumlanmıştır. Çalışmanın ilerleyen bölümlerinde ise, analitik integral alma yöntemlerinin hata büyüklükleri ve yöntemimizde meydana gelen hata büyüklükleri irdelenmiştir.

Buradan elde edilen sonuçlardan, Monte Carlo integral alma yönteminin ancak integral boyutunun 4. dereceden büyük olan integaller için avantajlı sonuçlar verebileceği ve sayısal tekniklere göre hassasiyeti daha düşük olduğu anlaşılmıştır. Belirli bir şekilde formülle ifade edilebilen ve boyu sayısı az olan integraller için verimi oldukça düşüktür.

Maalesef ki, ilgilenilen elektromanyetik problemlerdeki integrallere bu yöntemin uygulanması pek avantajlı olamayacağı çok açıktır. Bu nedenle integral çözümleri yerine, Monte Carlo yönteminin ve yaklaşımının elektromanyetik problemlere ne

şekilde uygulandığı araştırılarak, yöntemin olasılıksal ve doğadaki olayların incelenmesinde ne kadar verimli olduğundan bahsedilmiştir. Monte Carlo yaklaşımı ile tekrar edilerek ortalaması alınan problemlerin sonuçlarının, gerçek değerlerle oldukça örtüşür bir şekilde çıktığı görülmüştür.

Bu yöntem özellikle, elektromanyetikte, ortam parametrelerinin rasgele değişiminin canlandırılması, saçılmanın meydana geleceği rasgele yüzeylerin üretilmesi, rasgele sınırların belirlenmesi ve bir sistemin genel performansının belirlenmesindeki hesaplamalarda yoğun olarak kullanılmaktadır.

Monte Carlo tekniği olasılıksal temelli bir yöntem olduğundan dolayı, çok fazla hesaba ve rasgele ortamları modelleyebilecek sayıya ihtiyaç duymaktadır. Bunun içinde güçlü bilgisayarlara ve ideal rasgele sayı üreteçlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Günümüzde, bilgisayarların hızlanması ile olasılıksal temelli rasgele işlemlerin çözümünde verimli bir yöntem haline gelmektedir.

Monte Carlo tekniği, basit işlemlere ve çok boyutlu integrallere uygulanan, beklenen değerlerin tahmin edilmesinde etkili ve gerekli bir tekniktir. Bu teknik, çok-boyutlu integraller için, analitik formüllerden daha verimli bir tekniktir. Ayrıca, özel problemlere olasılıksal olarak rahatlıkla adapte edilebilir ve belirli integrasyon formüllerinin olmadığı, standart analitik tekniklerle çözülmesi verimsiz olacak, çok karmaşık problemlere rahatlıkla uygulanabilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Akleman F., Sevgi L.**, 1999, Stochastic Modeling of Tropospheric Wave Propagation
- [2] **Sevgi L., Akleman F., Tulunay Y.**, 1999, Stochastic Modeling of Radio Wave Propagation Through Earth-Troposphere Ducts
- [3] **Hastings F.D., Schneider J.B., Broschat S.L.**, 1995, A Monte-Carlo FDTD Technique for Rough-Surface Scattering, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **Vol 43**, No. 11, pp 1183-1191
- [4] **Yee K.S.**, 1966, Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media, *IEEE Transactions Antennas Propagation*, **Vol AP-14**, No. 4, pp. 302-307
- [5] **Tavukçu D.**, Haziran 1997, Haberleşmede Raslantısal Süreçlerin Modellenmesi, *Lisans Bitirme Ödevi*, İTÜ Elektrik-Elektronik Fakültesi, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü, İstanbul
- [6] **Yapanel Ü., Can S.**, 1998, Radara Yakalanmayan Gemilerin Radar Saçılma Yüzeylerinin (RSY) hesabında Monte Carlo Tekniğinin Kullanımı
- [7] **Can S.**, Şubat 1999, Savaş Gemilerinde Radar Saçılma Yüzeyi Hesabı, *Yüksek Lisans Tezi*, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul
- [8] **Lin Y.C., Sarabandi K.**, 1999, A Monte Carlo Coherent Scattering Model for Forest Canopies Using Fractal-Generated Trees, *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, **Vol 37**, No. 1, pp 440-451
- [9] **Bayazıt M., Oğuz B.**, 1995, Mühendisler için İstatistik, Birsan Yayınevi, İstanbul
- [10] **Toy C.**, July 1997, New Hampshire College, Distance Learning Program, Mathematics 220:Statistics, Sampling Distributions and The Central Limit Theorem, ctoy@minerva.nhc.edu, <http://www.dist-ed.nhc.edu/ctoy/mat220/m220htm/topic23.html>
- [11] Statistics, Sampling Theory, Sampling Distributions, Central Limit Theorem, <http://library.thinkquest.org/10030/statcon.htm>.
- [12] **Sadiku M.**, 1992, Numerical Techniques in Electromagnetics
- [13] **Weisstein E.W.**, 1996, Central Limit Theorem, University of Virginia Astronomy Department

- [14] **Abramowitz M., Stegun C. A.**, 1972, Handbook of Mathematical Functions and Formulas, Graphs. and Mathematical Tables, 9th printing, New York, Dover
- [15] **Feller W.**, 1945, The Fundamental Limit Theorems in Probability, *Bull. Amer. Math. Soc.*, No. 51, pp. 800-832
- [16] **Feller W.**, 1968, An Introduction to Probability Theory and Its Applications, **Vol 1**, 3rd ed., pp. 229, New York, Wiley
- [17] **Lindeberg J.W.**, 1922, Eine neue Herleitung des Exponentialgesetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Math. Z.* 15, pp. 211-225
- [18] **Spiegel M.R.**, 1992, Theory and Problems of Probability and Statistics, pp. 112-113, McGraw-Hill, New York
- [19] **Zabell S.L.**, 1995, Alan Turning and the Central Limit Theorem, *Amer. Math. Monthly*, **Vol 102**, pp. 483-494
- [20] **Fox G.**, Monte Carlo Integration and the Central Limit Theorem, Northeast Parallel Architectures Center at Syracuse University, gcf@npac.syr.edu, npac@npac.syr.edu
- [21] **Carter E.F. Jr**, 1999, Random Walks, Markov Chains and the Monte Carlo Method, Monte Carlo Integration, Taygeta Scientific Inc., skip@taygeta.com, <http://www.taygeta.com/rwalks/node5.html>
- [22] **Pevey R.E.**, Spring Semester 1998, NE582 Monte Carlo Course Notes, The University of Tennessee, Knoxville Department of Nuclear Engineering, <http://honeck.engr.utk.edu/~pevey/NE582/>
- [23] Numerical Receipes in C, 1988-1992 by Cambridge University Press, Programs Copyright (C) 1988-1992 by Numerical Receipes Software, The Art of Scientific Computing, <http://world.std.com/~nr>
- [24] **Gradshtein I. S.**, 1996, Table of integrals, Series, and Products, Academic Press 5th Edition, San Diego, California
- [25] **Lebedev N.N.**, 1972, Special Functions and Their Applications, Dover Publications, INC., New York
- [26] **Spainer J., Maize E.H.**, March 1994, Quasi-Random Methods For Estimating Integrals Using Relatively Small Samples, *SIAM Review*, **Vol. 36**, No. 1, pp. 18-44
- [27] **Moglestue C.**, 1993, Monte Carlo Simulation of Semiconductor Devices, Fraunhofer Institute of Applied Solid State Physics Freiburg im Breisgau, Germany, Chapman & Hall
- [28] **Ormand E.**, 1999, Monte Carlo Methods, Physics 594, Computational Science Course Notes, University of Tennessee and Oak Ridge National

Laboratory, http://csep1.phy.ornl.gov/guidry/phys594/lectures/monte_carlo/mc.html, guidry@utkvx.utk.edu, strayermr@ornl.gov

- [29] **Goodman J.**, January 1997, Monte Carlo Lecture Notes I, Random Number Generators, Courant Institute of Mathematical Sciences, NYU, goodman@cims.nyu.edu, <http://www.math.nyu.edu/faculty/goodman>
- [30] **Woller TA J.**, Spring 1996, The Basics of Monte Carlo Simulations, University of Nebraska-Lincoln Physical Chemistry Lab, <http://wwitch.unl.edu/zeng/joy/mclab/mcintro.htm>
- [31] **Huang C.H., Wu Z.G., Nevels R.D.**, 1994, Stationary Phase Monte Carlo Path Integral Analysis of Electromagnetic Wave Propagation in Graded-Index Wave Guides, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **Vol 42**, No. 9, pp 1709-1714
- [32] **Tsang L., Chan C.H., Sangani H.**, 1993, Banded Matrix Iterative Approach to Monte Carlo Simulations of Scattering of Waves by Large-Scale Random Rough Surface Problems - TM Case, *Electronics Letters*, **Vol 29**, No. 2, pp 166-167
- [33] **Johnson J.T., Tsang L., Shin R.T., Pak K., Chan C.H., Ishimaru A., Kuga Y.**, 1996, Backscattering Enhancement of Electromagnetic-Waves from 2-Dimensional Perfectly Conducting Random Rough Surfaces - A Comparison of Monte-Carlo Simulations with Experimental-Data, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **Vol 44**, No. 5, pp 748-756
- [34] **Sarabandi K., Polatin P.F., Ulaby F.T.**, 1993, Monte-Carlo Simulation of Scattering from a Layer of Vertical Cylinders, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **Vol 41**, No. 4, pp 465-475
- [35] **Polatin P.F., Sarabandi K., Ulaby F.T.**, 1995, Monte-Carlo Simulation of Electromagnetic Scattering from a Heterogeneous 2-Component Medium, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **Vol 43**, No. 10, pp 1048-1057
- [36] **Bakr M.H., Bandler J.W., Biernacki R.M., Chen S.H., Madsen K.**, 1998, A Trust Region Aggressive Space Mapping Algorithm for Em Optimization, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **Vol 46**, No. 12, pp 2412-2425
- [37] **Wang Y.M., Chew W.C.**, 1993, A Recursive T-Matrix Approach for the Solution of Electromagnetic Scattering by Many Spheres, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **Vol 41**, No. 12, pp 1633-1639
- [38] **Strausberger D.J., Garber F.D., Chamberlain N.F., Walton E.K.**, 1992, Modeling and Performance of HF Oth Radar Target Classification Systems, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **Vol 28**, No. 2, pp 396-403

- [39] **Li B.J., Liu P.L.**, 1997, Numerical-Analysis of Microdisk Lasers with Rough Boundaries, *IEEE Journal of Quantum Electronics*, **Vol 33**, No. 5, pp 791-795
- [40] **Li J.**, 1994, On Polarization Estimation Using a Crossed Dipole Array, *IEEE Transactions on Signal Processing*, **Vol 42**, No. 4, pp 977-980
- [41] **Arnon S., Sadot D., Kopeika N.S.**, 1994, Simple Mathematical Models for Temporal, Spatial, Angular, and Attenuation Characteristics of Light Propagating Through the Atmosphere for Space Optical Communication Monte Carlo Simulations, *Journal of Modern Optics*, **Vol 41**, No. 10, pp 1955-1972
- [42] **Zurk L.M., Tsang L., Shi J.C., Davis R.E.**, 1997, Electromagnetic Scattering Calculated from Pair Distribution Functions Retrieved from Planar Snow Sections, *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, **Vol 35**, No. 6, pp 1419-1428
- [43] **Pelosi G., Freni A., Coccioli R.**, 1993, Hybrid Technique for Analyzing Scattering from Periodic Structures, *IEE Proceedings-H Microwaves Antennas and Propagation*, **Vol 140**, No. 2, pp 65-70
- [44] **Aazhang B., Paris B.P., Orsak G.C.**, 1992, Neural Networks for Multiuser Detection in Code-Division Multiple-Access Communications, *IEEE Transactions on Communications*, **Vol 40**, No. 7, pp 1212-1222
- [45] **Pang T.**, 1997, Introduction to Computational Physics, Cambridge University Press
- [46] **Akleman F., Özyalçın M.O., Sevgi L.**, 29-30 Nisan 1999, Radar Saçılma Yüzeyi (RSY) Modelleme ve Radara Görünmeyen (Stealth) Hedef Tasarımı, 2000'li Yıllarda Uzay, Havacılık ve Savunma Teknolojilerinin Öncelikleri Sempozyumu, Hava Harp Okulu, Yeşilyurt, İstanbul
- [47] **Woller J.**, Spring 1996, The Basics of Monte Carlo Simulations, University of Nebraska-Lincoln Physical Chemistry Lab (Chem484), jwoller@unlgrad1.unl.edu, <http://wwitch.unl.edu/zeng/joy/mcintro.html>
- [48] Computational Science Education Project, Introduction to Monte Carlo Methods, <http://csep1.phy.ornl.gov/CSEP/MC/MC.html>
- [49] **Alfredo H.S.A., Wilson H.T.**, 1984, Probability Concepts in Engineering Planning and Design, Volume II, Decision, Risk and Reliability, pp. 274-332, John Wiley & Sons
- [50] **Geweke J.**, May 1995, Monte Carlo Simulation and Numerical Integration, Research Department *Staff Report 192*, Federal Reserve Bank of Minneapolis and University of Minnesota, <http://research.mpls.frb.fed.us/research/sr/sr192.html>

- [51] **Jain S.**, 1992, Monte Carlo Simulations of Disordered Systems, Department of Mathematics & Computing, Derbyshire College of Higher Education, United Kingdom
- [52] **Golden J.T.**, 1965, Fortran IV Programming and Computing, Scientist Marketing Manager IBM Corporation, Prentice-Hall, Englewood cliffs, New Jersey
- [53] **Kalos M.H., Whitlock P.A.**, 1986, Monte Carlo Methods Volume I:Basics, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, John Wiley & Sons Inc.
- [54] **Allen M.P., Tildesley D.J.**, 1987, Computer Simulation of Liquids, Department of Chemistry The University Southampton, Clarendon Press, Oxford
- [55] **Newman M.E.J., Barkema G.T.**, 1999, Monte Carlo Methods in Statistical Physics, Institute for Theoretical Physics Utrecht University, Clarendon Press, Oxford

EKLER

```

C*****
C  ADI      : PIR.FOR
C  AMAC     : MONTE CARLO INTEGRALI UZERINDE
C              DENEMELER YAPMAK
C  YONTEM   : REJECTION YONTEMI (HIT & MISS)
C  YAZAN    : DILARA TAVUKCU
C  TARİH    : ARALIK 1998
C  GUNCELLEME : NISAN 1999
C*****
      INTEGER SAYAC
      INTEGER N(11),M,S,K,L,J,O
      REAL X,Y,PI,PIG, TOPPI

C
C*****
C  GERCEK PI DEGERI
C*****
      PARAMETER (PIG = 3.1415927)

C
C*****
C  CEVRİM DEGERLERİ GIRILIYOR
C*****
C  KAC TANE FARKLI ORNEK SAYISI SECİLECEK
C*****
      WRITE(*,*) 'KAC FARKLI ORNEK SAYISI SECİLECEK, M=?(MAX=11)'
      READ(*,*) M

C
C*****
C  i. ORNEK SAYISI ALINIYOR
C*****
      DO L=1,M
          WRITE(*,*) L, 'i. ORNEK SAYISINI GIRINIZ '
          READ(*,*) N(L)
      END DO

C
C  WRITE(*,*) 'KAC DENEME GRUBU TEKRARI YAPILACAK, K=?'
C  READ(*,*) K
C*****
C  VERİLEN HER ORNEK SAYISI İCİN 100 TEKRAR YAPILACAK
C  MONTE CARLO YONTEMINDE BU SAYI 50, 100 GİBİ
C  DEGERLER ALABİLİR.
C  (MINIMUM SECİLEBİLECEK DEGERİ 30'DUR)
C*****
      K = 100

C
C*****
C  i. GIRILAN SAYIDA URETİLECEK ORNEKLERİN
C  KOYULACAGI OUT DOSYALARI ACILIYOR
C*****
      OPEN(UNIT=11, FILE='PIR1.DAT')
      OPEN(UNIT=12, FILE='PIR2.DAT')
      OPEN(UNIT=13, FILE='PIR3.DAT')

```

```

OPEN(UNIT=14, FILE='PIR4.DAT')
OPEN(UNIT=15, FILE='PIR5.DAT')
OPEN(UNIT=16, FILE='PIR6.DAT')
OPEN(UNIT=17, FILE='PIR7.DAT')
OPEN(UNIT=18, FILE='PIR8.DAT')
OPEN(UNIT=19, FILE='PIR9.DAT')
OPEN(UNIT=20, FILE='PIR10.DAT')
OPEN(UNIT=21, FILE='PIR11.DAT')

C
C*****
C      TUM FARKLI ORNEK SAYILI GRUPLARIN ULASTIKLARI      *
C      INTEGRAL DEGERLERININ TOPLANDIGI OUT DOSYASI ACILIYOR *
C*****
      OPEN(UNIT=30, FILE='SONR.DAT')

C
C*****
C      CEVRIMLER BASLIYOR      *
C CEVRIM SAYACLARI SIFIRLANIYOR *
C*****
      DO S=1,M
          TOPPI = 0.

C
          DO L = 1,K
              SAYAC = 0
              PI      = 0.

C
              DO J = 1,N(S)

C
C*****
C      RASGELE SAYILAR URETILİYOR      *
C*****
              X=RAN2(-100)
              Y=RAN2(-100)

C
C*****
C      INTEGRALI ALINAN BOLGENIN ICINDE OLAN NOKTALAR KABUL, *
C      DISINDA OLANLAR DEGERLER REDDEDILIYOR      *
C*****
              IF(X**2 + Y**2 .LE. 1.0) SAYAC = SAYAC + 1
          ENDDO

C
C*****
C      TOPLAM NOKTA SAYISI ILE KABUL EDILEN NOKTA      *
C      SAYISININ ORANI BULUNUYOR      *
C*****
          PI=4. * REAL(SAYAC) / REAL(N(S))

C
C*****
C      ELDE EDILEN DEGERLER ILGILI DOSYALARA YAZILIYOR      *
C*****
          IF(S.EQ.1)WRITE(11,*) L,PI,PI-PIG
          IF(S.EQ.2)WRITE(12,*) L,PI,PI-PIG
          IF(S.EQ.3)WRITE(13,*) L,PI,PI-PIG
          IF(S.EQ.4)WRITE(14,*) L,PI,PI-PIG
          IF(S.EQ.5)WRITE(15,*) L,PI,PI-PIG
          IF(S.EQ.6)WRITE(16,*) L,PI,PI-PIG
          IF(S.EQ.7)WRITE(17,*) L,PI,PI-PIG
          IF(S.EQ.8)WRITE(18,*) L,PI,PI-PIG
          IF(S.EQ.9)WRITE(19,*) L,PI,PI-PIG
          IF(S.EQ.10)WRITE(20,*) L,PI,PI-PIG
          IF(S.EQ.11)WRITE(21,*) L,PI,PI-PIG

```

```

C
C*****
C  SON DOSYAYA ISLENMEK UZERE ELDE EDILEN TUM PI DEGERLERI TUTULUYOR  *
C*****
      TOPPI = PI + TOPPI

C
C
C*****
C      TEK ADIMDA ELDE EDILEN INTEGRAL DEGERI ICIN      *
C      GRUBUN ORTALARINDAN BIR DEGER SECILİYOR      *
C*****
      O = 1
      IF(L.EQ.60) THEN
        WRITE(*,55) N(S),O, PI
        WRITE(30,55) N(S),O, PI
        WRITE(*,56) N(S),PI-PIG, 100.*(PI-PIG)/PIG
        WRITE(30,56) N(S),PI-PIG, 100.*(PI-PIG)/PIG
      END IF

C
C*****
C      MONTE CARLO CEVRIMI BITIYOR      *
C*****
      ENDDO

C
      TOPPI = TOPPI/REAL(K)

C
C*****
C      MONTE CARLO REDDETME YONTEMI ILE BULUNAN PI DEGERI      *
C      DOSYALARA YAZILIYOR      *
C      GERCEK PI DEGERINDEN % OLARAK SAPMASI BULUNUYOR      *
C*****
      WRITE(30,55) N(S), K, TOPPI
      WRITE(*,55) N(S), K, TOPPI
      WRITE(30,56) N(S), TOPPI-PIG, 100.*(TOPPI-PIG)/PIG
      WRITE(*,56) N(S), TOPPI-PIG, 100.*(TOPPI-PIG)/PIG
55  FORMAT(I8, ' DENEMENIN ',I4, ' KEZ TEKRARI SONUCUNDA PI = ', F11.8)
56  FORMAT(I8, ' DENEME SONUCUNDA ELDE EDILEN PI DEGERINDEN SAPMASI
      ',F11.8, ' BUNUN DEGERI %',F11.8)
C
      ENDDO

C
C*****
C      OUT DOSYALARI KAPATILIYOR      *
C*****
      CLOSE(11)
      CLOSE(12)
      CLOSE(13)
      CLOSE(14)
      CLOSE(15)
      CLOSE(16)
      CLOSE(17)
      CLOSE(18)
      CLOSE(19)
      CLOSE(20)
      CLOSE(21)

C
      CLOSE(30)

C
      STOP
      END

C

```

```

C*****
C      (0,1) ARASINDA DUZGUN DAGILIMLI RASGELE SAYI URETECI      *
C*****
C*****
      REAL FUNCTION RAN2(IDUM)
      PARAMETER (M=714025, IA=1366, IC=150889, RM=1.4005112E-6)
      DATA IFF /0/
      COMMON/DENE/IY, IR(97)
C      WRITE(*,*) IFF
      IF(IDUM.LT.0.OR.IFF.EQ.0)THEN
        IFF=1
        IDUM=MOD(IC-IDUM,M)
        DO 11 J=1,97
          IDUM=MOD(IA*IDUM+IC,M)
          IR(J)=IDUM
11      CONTINUE
        IDUM=MOD(IA*IDUM+IC,M)
        IY=IDUM
      ENDIF
C      WRITE(*,*) IY
      J=1+(97*IY)/M
      IF(J.GT.97.OR.J.LT.1)PAUSE
      IY=IR(J)
      RAN2=IY*RM
      IDUM=MOD(IA*IDUM+IC,M)
      IR(J)=IDUM
      RETURN
      END
C*****

```

```

C*****
C  ADI      : PIA.FOR *
C  AMAC     : MONTE CARLO INTEGRALI UZERINDE *
C                               DENEMELER YAPMAK *
C  YONTEM   : AVERAGING YONTEMI *
C  YAZAN    : DILARA TAVUKCU *
C  TARİH    : OCAK 1999 *
C*****
C          INTEGER SAYAC
C          INTEGER N(11),K,L,J,M,O
C          REAL X,Y,PI,PIG,TOPII,INTEG
C          PARAMETER(PIG=3.1415927)

C
C*****
C          GERCEK PI DEGERI *
C*****
C          PARAMETER (PIG = 3.1415927)

C
C*****
C          CEVRİM DEGERLERİ GIRILİYOR *
C*****
C          KAC TANE FARKLI ORNEK SAYISI SECİLECEK *
C*****
C          WRITE(*,*) 'KAC FARKLI ORNEK SAYISI SECİLECEK M=(MAX=11)'
C          READ(*,*) M

C
C          DO L=1,M
C              WRITE(*,*) L,'. ORNEK SAYISINI GIRINIZ'
C              READ(*,*) N(L)
C          END DO

C
C          WRITE(*,*) 'KAC DENEME GRUBU TEKRARI YAPILACAK, K=?'
C          READ(*,*) K
C*****
C          VERİLEN HER ORNEK SAYISI İCİN 100 TEKRAR YAPILACAK *
C          MONTE CARLO YONTEMINDE BU SAYI 50, 100 GİBİ *
C          DEGERLER ALABİLİR. *
C          (MINIMUM SECİLEBİLECEK DEGERİ 30'DUR) *
C*****
C          K = 100

C
C*****
C          1. GIRILAN SAYIDA ÜRETİLECEK ORNEKLERİN *
C          KOYULACAGI OUT DOSYALARI ACILIYOR *
C*****
C          OPEN(UNIT=11,FILE='PIA1.DAT')
C          OPEN(UNIT=12,FILE='PIA2.DAT')
C          OPEN(UNIT=13,FILE='PIA3.DAT')
C          OPEN(UNIT=14,FILE='PIA4.DAT')
C          OPEN(UNIT=15,FILE='PIA5.DAT')
C          OPEN(UNIT=16,FILE='PIA6.DAT')

```

```

OPEN(UNIT=17, FILE='PIA7.DAT')
OPEN(UNIT=18, FILE='PIA8.DAT')
OPEN(UNIT=19, FILE='PIA9.DAT')
OPEN(UNIT=20, FILE='PIA10.DAT')
OPEN(UNIT=21, FILE='PIA11.DAT')
C
C*****
C      TUM FARKLI ORNEK SAYILI GRUPLARIN ULASTIKLARI      *
C      INTEGRAL DEGERLERININ TOPLANDIGI OUT DOSYASI ACILIYOR *
C*****
      OPEN(UNIT=30, FILE='SONA.DAT')
C
C*****
C      CEVRIMLER BASLIYOR      *
C CEVRIM SAYACLARI SIFIRLANIYOR *
C*****
      DO S=1,M
      TOPPI = 0.
C
      DO L = 1,K
      INTEG = 0.
      PI = 0.
C
      DO J = 1,N(S)
C
C*****
C      X-EKSENINDE RASGELE BIR SAYI SECILİYOR      *
C*****
      X=RAN2(-100)
C
C*****
C      BU SECILEN X-DEGERINDE FONKSIYONUN DEGERI HESAPLANIYOR *
C      INTEGRAL DEGERI ELDE EDILEN DEGER * ARALIK'TIR      *
C      ILGILENDIGIMIZ ARALIKTA (B-A)=(1-0)=1'DIR      *
C      I = Y*(B-A) = Y      *
C*****
      Y=SQRT(1-(X*X))
C
C*****
C      INTEGRAL DEGERI ORTALAMASI ALINMAK UZERE TOPLANIYOR *
C*****
      INTEG=INTEG + Y
      ENDDO
C
C*****
C      SECILEN RASGELE X-DEGERLERINDEKI FONKSIYONUN ALDIGI *
C      DEGERLERIN ORTALAMASI ALINIYOR      *
C*****
      PI=4. * INTEG / REAL(N(S))
C
C*****
C      ELDE EDILEN DEGERLER ILGILI DOSYALARA YAZILIYOR      *
C*****
      IF(S.EQ.1) WRITE(11,*) L, PI, PI-PIG
      IF(S.EQ.2) WRITE(12,*) L, PI, PI-PIG
      IF(S.EQ.3) WRITE(13,*) L, PI, PI-PIG
      IF(S.EQ.4) WRITE(14,*) L, PI, PI-PIG
      IF(S.EQ.5) WRITE(15,*) L, PI, PI-PIG
      IF(S.EQ.6) WRITE(16,*) L, PI, PI-PIG
      IF(S.EQ.7) WRITE(17,*) L, PI, PI-PIG
      IF(S.EQ.8) WRITE(18,*) L, PI, PI-PIG

```

```

IF(S.EQ.9) WRITE(19,*) L, PI, PI-PIG
IF(S.EQ.10) WRITE(20,*) L, PI, PI-PIG
IF(S.EQ.11) WRITE(21,*) L, PI, PI-PIG
C
C*****
C      SON DOSYAYA ISLENMEK UZERE ELDE EDILEN TUM PI      *
C      DEGERLERININ ORTALAMASI TUTULUYOR                  *
C*****
C      TOPPI = PI + TOPPI
C
C*****
C      TEK ADIMDA ELDE EDILEN INTEGRAL DEGERI ICIN      *
C      GRUBUN ORTALARINDAN BIR DEGER SECILİYOR          *
C*****
C      O = 1
C      IF(L.EQ.60)THEN
C        WRITE(*,55) N(S),O,PI
C        WRITE(30,55) N(S),O,PI
C        WRITE(*,56) N(S), PI-PIG, 100.*(PI-PIG)/PIG
C        WRITE(30,56) N(S), PI-PIG, 100.*(PI-PIG)/PIG
C      END IF
C
C*****
C      MONTE CARLO CEVRIMI BITIYOR      *
C*****
C      ENDDO
C
C      TOPPI = TOPPI/REAL(K)
C
C*****
C      MONTE CARLO REDDETME YONTEMI ILE BULUNAN PI DEGERI      *
C      DOSYALARA YAZILIYOR                                      *
C      GERCEK PI DEGERINDEN % OLARAK SAPMASI BULUNUYOR        *
C*****
C      WRITE(30,55) N(S), K, TOPPI
C      WRITE(*,55) N(S), K, TOPPI
C      WRITE(30,56) N(S), TOPPI-PIG, 100.*(TOPPI-PIG)/PIG
C      WRITE(*,56) N(S), TOPPI-PIG, 100.*(TOPPI-PIG)/PIG
55  FORMAT(I8, ' DENEMENIN ',I4, ' KEZ TEKRARI SONUCUNDA PI = ', F11.8)
56  FORMAT(I8, ' DENEME SONUCUNDA ELDE EDILEN PI DEGERINDEN SAPMASI
',F11.8, ' BUNUN DEGERI %',F11.8)
C
C      ENDDO
C
C*****
C      OUT DOSYALARI KAPATILIYOR      *
C*****
C      CLOSE(11)
C      CLOSE(12)
C      CLOSE(13)
C      CLOSE(14)
C      CLOSE(15)
C      CLOSE(16)
C      CLOSE(17)
C      CLOSE(18)
C      CLOSE(19)
C      CLOSE(20)
C      CLOSE(21)
C
C      CLOSE(30)
C

```

```

        STOP
        END
C
C*****
C      (0,1) ARASINDA DUZGUN DAGILIMLI RASGELE SAYI URETECI      *
C*****
C*****
      REAL FUNCTION RAN2(IDUM)
      PARAMETER (M=714025, IA=1366, IC=150889, RM=1.4005112E-6)
      DATA IFF /0/
      COMMON/DENE/IY, IR(97)
C      WRITE(*,*) IFF
      IF (IDUM.LT.0.OR.IFF.EQ.0) THEN
        IFF=1
        IDUM=MOD(IC-IDUM,M)
        DO 11 J=1,97
          IDUM=MOD(IA*IDUM+IC,M)
          IR(J)=IDUM
11      CONTINUE
        IDUM=MOD(IA*IDUM+IC,M)
        IY=IDUM
      ENDIF
C      WRITE(*,*) IY
      J=1+(97*IY)/M
      IF (J.GT.97.OR.J.LT.1) PAUSE
      IY=IR(J)
      RAN2=IY*RM
      IDUM=MOD(IA*IDUM+IC,M)
      IR(J)=IDUM
      RETURN
      END
C*****

```

```

C*****
C  ADI      : PIC.FOR                      *
C  AMAC     : MONTE CARLO INTEGRALI UZERINDE *
C                      DENEMELER YAPMAK      *
C  YONTEM   : CONTROL VARIATES YONTEMI      *
C  YAZAN    : DILARA TAVUKCU                *
C  TARİH    : OCAK 1999                     *
C  GUNCELLEME : NISAN 1999                  *
C*****
C      INTEGER SAYAC
C      INTEGER N(11),K,L,J,M,O
C      REAL X,Y,PI,PIG, TOPPI, INTEG,H
C
C*****
C      GERCEK PI DEGERI *
C*****
C      PARAMETER (PIG = 3.1415927)
C
C*****
C      BU PROGRAMDA KONTROL FONKSIYONU OLARAK *
C      (1-X^3) FONKSIYONU KULLANILMISTIR      *
C*****
C      BU FONKSIYONUN (0,1) ARTALIGINDA INTEGRALI *
C      3./4. = 0.75 'TIR.                      *
C      INTEGRAL = (F(X)-H(X))(B-A) + IH        *
C*****
C  F(X): INTEGRALI BULUNMAK ISTENEN FONKSIYONUN *
C      X NOKTASINDAKI DEGERI                  *
C
C  H(X): INTEGRAL DEGERI BILINEN KONTROL FONKSIYONUNUN *
C      X NOKTASINDAKI DEGERI                  *
C
C  IH : KONTROL FONKSIYONUN (A,B) ARALIGINDAKI INTEGRALI *
C*****
C
C*****
C      CEVRIM DEGERLERI GIRILİYOR *
C*****
C*****
C  KAC TANE FARKLI ORNEK SAYISI SECILECEK *
C*****
C      WRITE(*,*) 'KAC FARKLI ORNEK SAYISI SECILECEK M=?(MAX=11)'
C      READ(*,*) M
C
C*****
C      i. ORNEK SAYISI ALINIYOR *
C*****
C      DO L=1,M
C          WRITE(*,*) L, 'i. ORNEK SAYISINI GIRINIZ'
C          READ(*,*) N(L)
C      END DO
C

```

```

C      WRITE(*,*) 'KAC DENEME GRUBU TEKRARI YAPILACAK, K=?'
C      READ(*,*) K
C*****
C      VERILEN HER ORNEK SAYISI ICIN 100 TEKRAR YAPILACAK      *
C      MONTE CARLO YONTEMİNDE BU SAYI 50, 100 GIBI          *
C      DEGERLER ALABİLİR.                                     *
C      (MINIMUM SECİLEBİLECEK DEGERI 30'DUR)                 *
C*****
C      K = 100
C
C*****
C      i. GIRILAN SAYIDA URETİLECEK ORNEKLERİN                *
C      KOYULACAGI OUT DOSYALARI ACILIYOR                      *
C*****
C      OPEN(UNIT=11, FILE='PIC1.DAT')
C      OPEN(UNIT=12, FILE='PIC2.DAT')
C      OPEN(UNIT=13, FILE='PIC3.DAT')
C      OPEN(UNIT=14, FILE='PIC4.DAT')
C      OPEN(UNIT=15, FILE='PIC5.DAT')
C      OPEN(UNIT=16, FILE='PIC6.DAT')
C      OPEN(UNIT=17, FILE='PIC7.DAT')
C      OPEN(UNIT=18, FILE='PIC8.DAT')
C      OPEN(UNIT=19, FILE='PIC9.DAT')
C      OPEN(UNIT=20, FILE='PIC10.DAT')
C      OPEN(UNIT=21, FILE='PIC11.DAT')
C
C*****
C      TUM FARKLI ORNEK SAYILI GRUPLARIN ULASTIKLARI          *
C      INTEGRAL DEGERLERİNİN TOPLANDIGI OUT DOSYASI ACILIYOR  *
C*****
C      OPEN(UNIT=30, FILE='SONC.DAT')
C
C*****
C      CEVRİMLER BASLIYOR      *
C      CEVRİM SAYAÇLARI SIFIRLANIYOR      *
C*****
C      DO S=1,M
C          TOPPI = 0.
C
C          DO L = 1,K
C              INTEG = 0.
C              PI = 0.
C
C              DO J = 1,N(S)
C
C                  C*****
C                  C      X-EKSENİNDE RASGELE BİR SAYI SECİLİYOR      *
C                  C*****
C                  X=RAN2(-100)
C
C                  C*****
C                  C      BU SECİLEN X-DEGERİNDE FONKSİYONUN VE YARDIMCI      *
C                  C      FONKSİYONUN DEGERİ HESAPLANIYOR      *
C                  C      YARDIMCI FONKSİYONUN (0,1) ARTALIGINDA INTEGRALI      *
C                  C      3./4. = 0.75 'TİR.      *
C                  C      INTEGRAL = (F(X)-H(X))(B-A) + İH      *
C                  C*****
C                  Y=SQRT(1-(X*X))
C                  H=1-(X*X*X)
C
C                  C*****
C*****

```

```

C  INTEGRAL DEGERI ORTALAMASI ALINMAK UZERE TOPLANIYOR      *
C *****
C
C                      INTEGRAL=(Y-H)*(B-A)+IH
C                      INTEG=INTEG + (Y-H) + 0.75
C
C *****
C          MONTE CARLO CEVRIMI BITIYOR      *
C *****
C                      ENDDO
C
C                      PI=4. * INTEG / REAL(N(S))
C
C *****
C          ELDE EDILEN DEGERLER ILGILI DOSYALARA YAZILIYOR      *
C *****
C                      IF(S.EQ.1) WRITE(11,*) L, PI, PI-PIG
C                      IF(S.EQ.2) WRITE(12,*) L, PI, PI-PIG
C                      IF(S.EQ.3) WRITE(13,*) L, PI, PI-PIG
C                      IF(S.EQ.4) WRITE(14,*) L, PI, PI-PIG
C                      IF(S.EQ.5) WRITE(15,*) L, PI, PI-PIG
C                      IF(S.EQ.6) WRITE(16,*) L, PI, PI-PIG
C                      IF(S.EQ.7) WRITE(17,*) L, PI, PI-PIG
C                      IF(S.EQ.8) WRITE(18,*) L, PI, PI-PIG
C                      IF(S.EQ.9) WRITE(19,*) L, PI, PI-PIG
C                      IF(S.EQ.10) WRITE(20,*) L, PI, PI-PIG
C                      IF(S.EQ.11) WRITE(21,*) L, PI, PI-PIG
C
C *****
C          SON DOSYAYA ISLENMEK UZERE ELDE EDILEN TUM PI      *
C          DEGERLERININ ORTALAMASI TUTULUYOR      *
C *****
C                      TOPPI = PI + TOPPI
C
C *****
C          TEK ADIMDA ELDE EDILEN INTEGRAL DEGERI ICIN      *
C          GRUBUN ORTALARINDAN BIR DEGER SECILIYOR      *
C *****
C                      O = 1
C                      IF(L.EQ.60)THEN
C                      WRITE(*,55) N(S),O,PI
C                      WRITE(30,55) N(S),O,PI
C                      WRITE(*,56) N(S), PI-PIG, 100.*(PI-PIG)/PIG
C                      WRITE(30,56) N(S), PI-PIG, 100.*(PI-PIG)/PIG
C                      END IF
C
C *****
C          MONTE CARLO CEVRIMI BITIYOR      *
C *****
C                      ENDDO
C
C *****
C          MONTE CARLO REDDETME YONTEMI ILE BULUNAN PI DEGERI      *
C          DOSYALARA YAZILIYOR      *
C          GERCEK PI DEGERINDEN % OLARAK SAPMASI BULUNUYOR      *
C *****
C                      WRITE(30,55) N(S), K, TOPPI
C                      WRITE(*,55) N(S), K, TOPPI
C                      WRITE(30,56) N(S), TOPPI-PIG, 100.*(TOPPI-PIG)/PIG
C                      WRITE(*,56) N(S), TOPPI-PIG, 100.*(TOPPI-PIG)/PIG
55  FORMAT(I8, ' DENEMENIN ',I4, ' KEZ TEKRARI SONUCUNDA PI = ', F11.8)

```

```

56      FORMAT(I8, ' DENEME SONUCUNDA ELDE EDILEN PI DEGERINDEN SAPMASI
',F11.8, ' BUNUN DEGERI %',F11.8)
C
      END DO
C
C*****
C      OUT DOSYALARI KAPATILIYOR      *
C*****
      CLOSE(11)
      CLOSE(12)
      CLOSE(13)
      CLOSE(14)
      CLOSE(15)
      CLOSE(16)
      CLOSE(17)
      CLOSE(18)
      CLOSE(19)
      CLOSE(20)
      CLOSE(21)
C
      CLOSE(30)
C
      STOP
      END
C
C*****
C      (0,1) ARASINDA DUZGUN DAGILIMLI RASGELE SAYI URETECI      *
C*****
C*****
      REAL FUNCTION RAN2(IDUM)
      PARAMETER (M=714025, IA=1366, IC=150889, RM=1.4005112E-6)
      DATA IFF /0/
      COMMON/DENE/IY, IR(97)
C      WRITE(*,*) IFF
      IF(IDUM.LT.0.OR.IFF.EQ.0)THEN
        IFF=1
        IDUM=MOD(IC-IDUM,M)
        DO 11 J=1,97
          IDUM=MOD(IA*IDUM+IC,M)
          IR(J)=IDUM
11      CONTINUE
        IDUM=MOD(IA*IDUM+IC,M)
        IY=IDUM
      ENDIF
C      WRITE(*,*) IY
      J=1+(97*IY)/M
      IF(J.GT.97.OR.J.LT.1)PAUSE
      IY=IR(J)
      RAN2=IY*RM
      IDUM=MOD(IA*IDUM+IC,M)
      IR(J)=IDUM
      RETURN
      END
C*****

```

```

C*****
C  ADI      : PII.FOR                      *
C  AMAC     : MONTE CARLO INTEGRALI UZERINDE *
C                                     DENEMELER YAPMAK *
C  YONTEM   : IMPORTANCE SAMPLING YONTEMI   *
C  YAZAN    : DILARA TAVUKCU               *
C  TARİH    : MAYIS 1999                   *
C*****
C      INTEGER SAYAC
C      INTEGER N(11), K, L, J, M, O
C      REAL    X, Y, PI, PIG, TOPPI, INTEG, P, PSI, E
C
C*****
C      GERCEK PARAMETRE DEGERLERI      *
C*****
C      PARAMETER(PIG=3.1415927, E=2.713)
C
C*****
C  BU PROGRAMDA OLASILIK YARDIMCI FONKSIYON OLARAK *
C       $H(X) = E^{(-X)}$  FONKSİYONU KULLANILMISTIR *
C  BU FONKSIYON (0,1) ARASINDA NORMALÝZE EDÝLEREK *
C       $P(X) = E^{(-X)} * E / (E-1)$  OLASILIK YOGUNLUK *
C      FONKSİYONUNA ERÝSÝLMÝSTÝR *
C*****
C  BU PDF FONKSIYONUN (0,1) ARTALIGINDA INTEGRALI *
C      OLASILIK DAGILIM FONKSIYONLARI KURALLARINA *
C      UYGUN OLARAK 1'DIR. *
C       $PP(X)(0,1); EXP(-X) * E / (E-1)$  *
C       $= |0, X|, (-EXP(-X)) * E / (E-1)$  *
C *
C  BU FONKSIYONUN OLASILIK DAGILIM FONKSIYONU; *
C       $F(X) = (e / (e-1)) (1 - e^{-X})$  'DIR. *
C *
C   $PSI = (-EXP(-X) + 1) * E / (E-1) \Rightarrow X = -\log(1 - Y * (E-1) / E)$  *
C      COZUMU ICIN TEZE BAKINIZ *
C*****
C
C*****
C      CEVRIM DEGERLERI GIRILİYOR *
C*****
C*****
C      KAC TANE FARKLI ORNEK SAYISI SECİLECEK *
C*****
C      WRITE(*,*) 'KAC FARKLI ORNEK SAYISI SECİLECEK M=?(MAX=11)'
C      READ(*,*) M
C
C*****
C      i. ORNEK SAYISI ALINIYOR *
C*****
C      DO L=1,M
C          WRITE(*,*) L, ' . ORNEK SAYISINI GIRINIZ '
C          READ(*,*) N(L)

```

```

END DO

C
C      WRITE(*,*) 'KAC DENEME GRUBU TEKRARI YAPILACAK, K=?'
C      READ(*,*) K
C*****
C      VERILEN HER ORNEK SAYISI ICIN 100 TEKRAR YAPILACAK      *
C      MONTE CARLO YONTEMİNDE BU SAYI 50, 100 GIBI          *
C      DEGERLER ALABILIR.                                     *
C      (MINIMUM SECİLEBİLECEK DEGERI 30'DUR)                 *
C*****
C      K = 100

C
C*****
C      i. GIRILAN SAYIDA URETİLECEK ORNEKLERİN                *
C      KOYULACAGI OUT DOSYALARI ACILIYOR                      *
C*****
C      OPEN(UNIT=11, FILE='PII1.DAT')
C      OPEN(UNIT=12, FILE='PII2.DAT')
C      OPEN(UNIT=13, FILE='PII3.DAT')
C      OPEN(UNIT=14, FILE='PII4.DAT')
C      OPEN(UNIT=15, FILE='PII5.DAT')
C      OPEN(UNIT=16, FILE='PII6.DAT')
C      OPEN(UNIT=17, FILE='PII7.DAT')
C      OPEN(UNIT=18, FILE='PII8.DAT')
C      OPEN(UNIT=19, FILE='PII9.DAT')
C      OPEN(UNIT=20, FILE='PII10.DAT')
C      OPEN(UNIT=21, FILE='PII11.DAT')

C
C*****
C      TUM FARKLI ORNEK SAYILI GRUPLARIN ULASTIKLARI          *
C      INTEGRAL DEGERLERİNİN TOPLANDIGI OUT DOSYASI ACILIYOR  *
C*****
C      OPEN(UNIT=30, FILE='SONI.DAT')

C
C*****
C      CEVRİMLER BASLIYOR                                     *
C      CEVRİM SAYAÇLARI SIFIRLANIYOR                         *
C*****
C      DO S=1,M
C          TOPPI = 0.

C
C          DO L = 1,K
C              INTEG = 0.
C              PI = 0.

C
C              DO J = 1,N(S)

C
C*****
C      RASGELE SAYILAR URETİLİYOR                             *
C*****
C          PSI=RAN2(-100)

C
C*****
C      TANIMSIZ DEGERLER GRUPTAN ÇIKARTILIYOR                 *
C*****
C          IF(PHI.EQ.0.00000000) PHI=0.00000001

C
C*****
C      *
C      OLASILIK DAGILIM FONKSİYONUNDAN TERS ALINARAK
C      *

```

```

C      ISTENEN OLASILIK YOGUNLUK FONKSIYONLU SAHIP SAYILAR URETILİYOR
C      *
C*****
C      X=-LOG(1-PSI*(E-1)/E )
C*****
C      **
C      ISTENEN OLASILIK YOGUNLUK FONKSIYONLUGUNA SAHIP URETILEN SAYILAR
C      *
C      X-EKSENİNDE RASGELE URETILMIS OLARAK ELE ALINARAK IMPORTANCE
C      *
C      SAMLIPNG YONTEMI UYGULANDI I(X)=Y(X)/P(X)
C      *
C*****
C      **
C      Y=SQRT(1.-(X*X))
C      P=EXP(-X)*E/(E-1)
C      INTEGRAL=Y(X)/P(X) Y=P OLARAK KULLANILDI
C      INTEG=INTEG + Y/P
C      ENDDO
C
C*****
C      SECILEN RASGELE X-DEGERLERİNDEKİ FONKSIYONUN ALDIGI *
C      DEGERLERİN ORTALAMASI ALINIYOR *
C*****
C      PI=4. * INTEG / REAL(N(S))
C
C*****
C      ELDE EDİLEN DEGERLER İLGİLİ DOSYALARA YAZILIYOR *
C*****
C      IF(S.EQ.1) WRITE(11,*) L, PI, PI-PIG
C      IF(S.EQ.2) WRITE(12,*) L, PI, PI-PIG
C      IF(S.EQ.3) WRITE(13,*) L, PI, PI-PIG
C      IF(S.EQ.4) WRITE(14,*) L, PI, PI-PIG
C      IF(S.EQ.5) WRITE(15,*) L, PI, PI-PIG
C      IF(S.EQ.6) WRITE(16,*) L, PI, PI-PIG
C      IF(S.EQ.7) WRITE(17,*) L, PI, PI-PIG
C      IF(S.EQ.8) WRITE(18,*) L, PI, PI-PIG
C      IF(S.EQ.9) WRITE(19,*) L, PI, PI-PIG
C      IF(S.EQ.10) WRITE(20,*) L, PI, PI-PIG
C      IF(S.EQ.11) WRITE(21,*) L, PI, PI-PIG
C
C*****
C      SON DOSYAYA İSLENMEK ÜZERE ELDE EDİLEN TUM PI *
C      DEGERLERİNİN ORTALAMASI TUTULUYOR *
C*****
C      TOPPI = PI + TOPPI
C
C*****
C      TEK ADIMDA ELDE EDİLEN INTEGRAL DEGERİ İÇİN *
C      GRUBUN ORTALARINDAN BİR DEGER SECİLİYOR *
C*****
C      O = 1
C      IF(L.EQ.60)THEN
C          WRITE(*,55) N(S),O,PI
C          WRITE(30,55) N(S),O,PI
C          WRITE(*,56) N(S), PI-PIG, 100.*(PI-PIG)/PIG
C          WRITE(30,56) N(S), PI-PIG, 100.*(PI-PIG)/PIG
C      END IF

```

```

C
C*****
C      MONTE CARLO CEVRIMI BITIYOR      *
C*****
      ENDDO
C
      TOPPI = TOPPI/REAL(K)
C
C*****
C      MONTE CARLO REDDETME YONTEMI ILE BULUNAN PI DEGERI      *
C      DOSYALARA YAZILIYOR      *
C      GERCEK PI DEGERINDEN % OLARAK SAPMASI BULUNUYOR      *
C*****
      WRITE(30,55) N(S), K, TOPPI
      WRITE(*,55) N(S), K, TOPPI
      WRITE(30,56) N(S), TOPPI-PIG, 100.*(TOPPI-PIG)/PIG
      WRITE(*,56) N(S), TOPPI-PIG, 100.*(TOPPI-PIG)/PIG
C
55      FORMAT(I8,' DENEMENIN ',I4,' KEZ TEKRARI SONUCUNDA PI = '
>          , F12.8)
56      FORMAT(I8,' DENEMENIN PI DEGERINDEN SAPMASI '
>          , F11.8,' BUNUN DEGERI % ',F12.8)
C
      END DO
C
C*****
C      OUT DOSYALARI KAPATILIYOR      *
C*****
      CLOSE(11)
      CLOSE(12)
      CLOSE(13)
      CLOSE(14)
      CLOSE(15)
      CLOSE(16)
      CLOSE(17)
      CLOSE(18)
      CLOSE(19)
      CLOSE(20)
      CLOSE(21)
C
      CLOSE(30)
C
      STOP
      END
C
C*****
C      (0,1) ARASINDA DUZGUN DAGILIMLI RASGELE SAYI URETECI      *
C*****
C*****
      REAL FUNCTION RAN2(IDUM)
      PARAMETER (M=714025, IA=1366, IC=150889, RM=1.4005112E-6)
      DATA IFF /0/
      COMMON/DENE/IY, IR(97)
C      WRITE(*,*) IFF
      IF (IDUM.LT.0.OR.IFF.EQ.0) THEN
          IFF=1
          IDUM=MOD(IC-IDUM,M)
          DO 11 J=1, 97
              IDUM=MOD(IA*IDUM+IC,M)
              IR(J)=IDUM
11      CONTINUE

```

```

        IDUM=MOD( IA*IDUM+IC, M)
        IY=IDUM
    ENDIF
C      WRITE(*,*) IY
        J=1+(97*IY)/M
        IF( J.GT.97.OR.J.LT.1)PAUSE
        IY=IR(J)
        RAN2=IY*RM
        IDUM=MOD( IA*IDUM+IC, M)
        IR(J)=IDUM
        RETURN
    END
C*****

```

```

C*****
C  ADI      : PIS.FOR
C  AMAC     : MONTE CARLO INTEGRALI ILA SIMPSON YONTEMINI
C              KARSILASTIRMAK ICIN YAPILAN PROGRAM
C
C  YONTEM   : SIMPSON YONTEMI
C  UYGULAMA : DILARA TAVUKCU
C*****
C
C  This computer program is part of the book, "An
C      Introduction to Computatinal Physics," written
C      by Tao Pang and published and copyrighted
C      by Cambridge University Press in 1997.
C  No warranties, express or implied, are made for this
C      program.
C
C*****
C      PROGRAM INTEGRAL
C  Main program for evaluation of an integral with
C      integrand sqrt(1-x^2) in the region if [0,1.]
C*****
C
C      PARAMETER(N=9)
C      REAL X(N),F(N)
C
C      H = 1./(N-1)
C
C      DO 100 I=1,N
C          X(I)=H*(I-1)
C          F(I)= SQRT(1-X(I)*X(I))
C          WRITE(*,*) X(I),F(I)
100  CONTINUE
C
C      S = 0.
C      S0 = 0.
C      S1 = 0.
C      S2 = 0.
C
C      DO 101 I= 2,N-1,2
C          S1 = S1 + F(I-1)
C          S0 = S0 + F(I)
C          S2 = S2 + F(I+1)
101  CONTINUE
C
C      S = H*(S1 + 4.*S0 + S2)/3.
C
C  If N is even, add the last slice separately
C
C      IF(MOD(N,2).EQ.0) S = S + H*(5.*F(N) + 8.*F(N-1) - F(N-2))/12.
C
C      WRITE(6,999) S,S*4
C      STOP

```

```
999      FORMAT (F16.8)
      END
```

```

C*****
C  ADI      : PIH.FOR *
C  AMAC     : MONTE CARLO INTEGRALI UZERINDE *
C              DENEMELER YAPMAK *
C  YONTEM   : REJECTION YONTEMI (HIT & MISS) *
C  UYGULAMA : BOYUT SAYISI DEGISEN HIPER KURENIN HACMINI *
C              BULMA PROBLEMI UZERINE MONTE CARLO *
C              REDDETME YONTEMINI UYGULAMAK *
C*****
C      INTEGER  BOYUT, BYT, BS, T
C      REAL     INTEG, TOPINT, X(11), Y, INTG(11), R, RBUL
C
C      INTEGER  SAYAC
C      INTEGER  N(11), M, S, K, L, J, O
C      REAL     PI, PIG, TOPPI
C
C*****
C      GERCEK PI DEGERI *
C*****
C      PARAMETER (PI = 3.1415927)
C
C*****
C      CEVRIM DEGERLERI GIRILİYOR *
C*****
C*****
C      KAC TANE FARKLI ORNEK SAYISI SECİLECEK *
C      KAC BOYUTLU HIPE KURENIN HACMI HESAPLANACAK *
C              BİLGİSİ GIRILİYOR *
C*****
C
C      WRITE(*,*) 'KACINCI BOYUTA KADAR ORNEK DEGERİ ALINACAK BOYUT=?'
C      READ(*,*) BOYUT
C
C      WRITE(*,*) 'KAC FARKLI ORNEK SAYISI KULLANILACAK?'
C      READ(*,*) M
C
C      DO L=1,M
C          WRITE(*,*) L, '. ORNEK SAYISINI GIRINIZ '
C          READ(*,*) N(L)
C      END DO
C
C      WRITE(*,*) 'KAC DENEME GRUBU TEKRARI YAPILACAK, K=?'
C      READ(*,*) K
C*****
C      VERİLEN HER ORNEK SAYISI İCİN 100 TEKRAR YAPILACAK *
C      MONTE CARLO YONTEMINDE BU SAYI 50, 100 GİBİ *
C      DEGERLER ALABİLİR. *
C      (MINIMUM SECİLEBİLECEK DEGERİ 30'DUR) *
C*****
C      K = 100
C
C*****

```

```

C      HACMI HESAPLANAN N-BOYUTLU HIPER KURENIN BULUNAN      *
C      DEGERLERININ TUTULACAGI OUT DOSYALARI OLUSTURULUYOR    *
C      *****
C      OPEN(UNIT=30, FILE='SONH.DAT')
C      OPEN(UNIT=35, FILE='SONCIZ.DAT')
C
C      SAYAC      = 0
C
C      *****
C      KURENIN YARICAPI GIRILIYOR      *
C      *****
C      R=0.5
C
C      *****
C      HIPER KURE HACMININ, FONKSIYONLARI YARDIMIYLA BULUNAN    *
C      HATA HESABINDA KULLANILACAK HACIM DEGERLERI      *
C      *****
C      INTG(1)= 2.
C      INTG(2)= PI*R**2
C      INTG(3)= (4./3.)*PI*R**3
C      INTG(4)= PI**2/2.*R**4
C      INTG(5)= PI**2*64./120.*R**5
C      INTG(6)= PI**3/6.*R**6
C      INTG(7)= PI**3*16./105.*R**7
C      INTG(8)= PI**4/24.*R**8
C      INTG(9)= PI**4*32./945.*R**9
C      INTG(10)= PI**5/120.*R**10
C      INTG(11)= PI**5*2048./332640.*R**11
C
C      *****
C      2. BOYUTTAN ITIBAREN KURENIN HACMI HESAPLANMAYA BASLANIYOR      *
C      *****
C      DO BYT=2, BOYUT
C
C      WRITE(*,*) BYT, '-BOYUTLU HYPER KURE ICIN ISLEM YAPILIYOR '
C      d      ,INTG(BYT)
C      WRITE(30,*) BYT, '-BOYUTLU HYPER KURE ICIN ISLEM YAPILIYOR '
C      d      ,INTG(BYT)
C
C      DO S=1,M
C      TOPINT = 0.
C      DO L = 1,K
C      SAYAC = 0
C      INTEG      = 0.
C
C      DO J = 1,N(S)
C      Y=0.
C      DO BS=1, BYT
C
C      *****
C      HER BOYUT ICIN 1-RASGELE SAYILAR URETILIYOR      *
C      *****
C      X(BS)=RAN2(-100)
C
C      *****
C      SECILEN DEGELERE KARSI DUSEN NOKTANIN      *
C      ORJINE UZAKLIGI SAPLANIYOR      *
C      *****
C      Y=X(BS)**2+Y
C      ENDDO
C      WRITE(*,*) Y

```

```

                                RBUL=SQRT(Y)
C
C*****
C                                INTEGRALI ALINAN BOLGENIN ICINDE OLAN NOKTALAR KABUL, *
C                                DISINDA OLANLAR DEGERLER REDDEDILIYOR *
C*****
                                IF(RBUL .LE. 1.0) SAYAC = SAYAC + 1
                                ENDDO
C
                                INTEG = REAL(SAYAC) / REAL(N(S))
C
                                TOPINT = INTEG + TOPINT
C
                                ENDDO
C
C*****
C                                TOPLAM NOKTA SAYISI ILE KABUL EDILEN NOKTA *
C                                SAYISININ ORANI BULUNUYOR *
C*****
                                TOPINT = TOPINT/REAL(K)
C
                                WRITE(30,55) N(S), K, TOPINT
                                WRITE(*,55) N(S), K, TOPINT
                                WRITE(30,56) N(S), TOPINT-INTG(BYT),
d                                100.*(TOPINT-INTG(BYT))/INTG(BYT)
                                WRITE(*,56) N(S), TOPINT-INTG(BYT),
d                                100.*(TOPINT-INTG(BYT))/INTG(BYT)
55    FORMAT(I8, ' DENEMENIN ',I4,' KEZ TEKRARI SONUCUNDA INT = ',
F11.8)
56    FORMAT(I8, ' DENEME SONUCUNDA BULUNAN HACMIN GERCEK DEGERINDEN
SAPMASI ',F11.8, ' BUNUN YUZDE DEGERI %',F11.6)
C
                                WRITE(35,*) N(S), 100.*(TOPINT-INTG(BYT))/INTG(BYT),TOPINT,BYT
C
                                ENDDO
                                ENDDO
C
                                CLOSE(30)
                                CLOSE(35)
C
                                STOP
                                END
C
C*****
C                                (0,1) ARASINDA DUZGUN DAGILIMLI RASGELE SAYI URETECI *
C*****
C*****
REAL FUNCTION RAN2(IDUM)
PARAMETER (M=714025,IA=1366,IC=150889,RM=1.4005112E-6)
DATA IFF /0/
COMMON/DENE/IY,IR(97)
C    WRITE(*,*) IFF
IF(IDUM.LT.0.OR.IFF.EQ.0)THEN
    IFF=1
    IDUM=MOD(IC-IDUM,M)
    DO 11 J=1,97
        IDUM=MOD(IA*IDUM+IC,M)
        IR(J)=IDUM
11    CONTINUE
    IDUM=MOD(IA*IDUM+IC,M)
    IY=IDUM

```

```

ENDIF
C  WRITE(*,*) IY
  J=1+(97*IY)/M
  IF(J.GT.97.OR.J.LT.1)PAUSE
  IY=IR(J)
  RAN2=IY*RM
  IDUM=MOD(IA*IDUM+IC,M)
  IR(J)=IDUM
  RETURN
  END
C*****

```

ÖZGEÇMİŞ

Dilara Tavukçu, 1976 yılında Çanakkale'de doğdu. Lise öğrenimini, 1993 yılında Biga Mehmet Akif Ersoy Lisesi'nde ikincilikle tamamladı. İstanbul Teknik Üniversitesi, Elektrik - Elektronik Fakültesi, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü'nden, 1997 yılında üçüncü olarak mezun oldu ve mühendis ünvanını aldı. Aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektronik ve Haberleşme Anabilim Dalı'nda yüksek öğrenimine ve özel bir firmada mühendis olarak görevine başladı. Halen, Elektronik ve Haberleşme Mühendisi olarak çalışmaktadır.